Univerzita Karlova v Praze, Filozofická fakulta
Katedra logiky

Martina Pivoňková

DYNAMICKÉ EPISTEMICKÉ LOGIKY
DYNAMIC EPISTEMIC LOGICS

Diplomová práce

Vedoucí práce: Mgr. Marta Bílková, Ph.D.
Konzultant: PhDr. Michal Peliš, Ph.D.

2012

Ráda bych poděkovala vedoucí své práce Martě Bílkové za konzultace a usměrňování mé práce a rovněž za některé užitečné postřehy.

Dále bych chtěla poděkovat Michalu Pelišovi a Ondreji Majerovi, jakož i všem účastníkům jimi vedeného semináře za průběžné připomínky a také za povzbuzování v obdobích mé snížené výkonnosti. Michalovi navíc za to, že mi byl vždy pohotově k dispozici, kdykoli jsem potřebovala konzultovat své výsledky.

Zvláštní dík patří všem, kdo se věnovali mé dceři, zatímco já jsem se věnovala této práci.

Prohlašuji, že jsem diplomovou práci vypracovala samostatně, že jsem řádně citovala všechny použité prameny a literaturu a že práce nebyla využita v rámci jiného vysokoškolského studia či k získání jiného nebo stejného titulu.

V Praze dne 18. srpna 2012

Martina Pivoňková

Abstrakt

V této práci se budeme zabývat logikou veřejného prohlášení, která je dynamickým rozšířením epistemické logiky. Nejprve vyložíme logiku *pravdivého* veřejného prohlášení pro multiagentní systém S5, a poté budeme zkoumat, jak by mělo vypadat veřejné prohlášení v systémech slabších než je S5. Zaměříme se konkrétně na systémy, v nichž neplatí axiom T a epistemický operátor nutnosti se v nich interpretuje nikoli jako „znalost“, nýbrž jako „přesvědčení“. Vytvoříme tak novou sémantiku veřejného prohlášení, které už nemusí být pravdivé, je ovšem jako pravdivé přijímáno. Systémy rozšířené o takovéto veřejné prohlášení se rovněž pokusíme axiomatizovat.

Klíčová slova: logika veřejného prohlášení, logika přesvědčení

Abstract

In this thesis we will deal with the logic of public announcement which is a dynamic extension of epistemic logic. First we will explain the logic of truthful public announcement for the multiagent S5 system. Then we will examine what the public announcement can look like in systems weaker than S5. We will focus namely on systems in which the T axiom is invalid and the epistemic modality is interpreted not as a "knowledge" but as a "belief". We will create new semantics of public announcement which is not necessarily truthful but it is believed to be true. We will also try to axiomatize systems that have arisen in this way.

Keywords: public announcement logic, logic for belief

Obsah

1 Úvod

Epistemická logika je logikou modální, a to takovou, v níž se operátor nutnosti interpretuje jako *znalost*. Ve své multiagentní verzi pak epistemická logika modeluje znalost v nějaké skupině agentů. Ať už uvažujeme agenty jako lidské bytosti, robotické stroje, nebo třeba nějaké databáze, snadno si představíme, že jejich znalosti se mohou pod vlivem jistých událostí měnit. V epistemické logice můžeme jen staticky zachytit stav znalosti před touto změnou a po ní. Chceme-li tuto změnu popsat přímo v daném systému, můžeme vytvořit jeho „dynamické“ rozšíření, to znamená přidat do jazyka nový operátor vyjadřující danou událost, s ním samozřejmě jeho sémantickou interpretaci, a pokud možno také patřičným způsobem rozšířit axiomatiku. *Dynamickou epistemickou logikou* pak rozumíme právě takto vzniklé systémy. Přitom onou událostí se tu zpravidla míní taková událost, která nemá vliv na faktický stav světa, nýbrž skutečně jen na znalosti agentů o tomto neměnném světě. Jednou z takových událostí, která může měnit znalosti agentů, je tzv. *veřejné prohlášení*. To bude také předmětem zkoumání této práce.

Dynamická epistemická logika je studována v rámci snahy zachytit v nějakém formálním systému *komunikaci* mezi agenty. A veřejné prohlášení je jednou z nejsnáze popsatelných událostí, pomocí níž si agenti v nějaké skupině předávají mezi sebou své znalosti. Je to totiž taková událost, která přináší všem agentům stejnou informaci, a navíc otevřeně v tom smyslu, že mezi agenty je přijetí této stejné informace všemi agenty z celé skupiny obecně známo.

Logika veřejného prohlášení bývá zpravidla zkoumána pro „pravdivou“ znalost, a hlavním cílem této práce je prozkoumat, jak by mělo veřejné prohlášení vypadat v logikách, v nichž znalost pravdivá být nemusí, a interpretujeme ji tak spíše jako „přesvědčení“. K tomuto rozlišení se podrobněji vyjádříme ve druhé kapitole, rovnou ale poznamenejme, že filozofické úvahy na téma znalost vs. přesvědčení jsou nad rámec této práce, a rozhodující je pro nás prostě přijetí či odmítnutí axiomu T.

Veřejné prohlášení má dobrý smysl zkoumat v systémech pro jazyk s obecnou znalostí, protože jak snad intuice napovídá, veřejné prohlášení je docela typickým „nástrojem“ pro rozšíření informace do obecného povědomí. Především z teoretického hlediska je ovšem zajímavé zabývat se veřejným prohlášením i v jazyce pouze s individuální znalostí. Jak totiž uvidíme, lze každou formuli v takovém jazyce převést na formuli v jazyce *bez veřejného prohlášení*. Ve všech kapitolách této práce tedy budeme vždy postupovat od systémů pouze s individuální znalostí k jejich rozšíření o obecnou znalost. Průběh práce si předem shrňme v následujícím přehledu jednotlivých kapitol.

Druhá kapitola je výkladem multiagentní epistemické logiky v její „nedynamické“ podobě. Cílem této kapitoly je spíše uvést základní pojmy a tvrzení, které budeme využívat v dalších kapitolách, a všechny výsledky z této kapitoly jsou převzaty z literatury. Předložíme tedy postupně syntax, sémantiku a axiomatiku epistemické logiky a budeme přitom rozlišovat mezi systémy pro logiku znalosti a pro logiku přesvědčení tak, aby dobře posloužily našim potřebám v dalších kapitolách.

Ve třetí kapitole představíme logiku veřejného prohlášení v podobě, v jaké je prezentována v knize *Dynamic epistemic logic* autorů H. van Ditmarsch, W. van der Hoek a B. Kooi (v seznamu literatury uvedené jako [Dit08]). Jedná se o logiku *pravdivého* veřejného prohlášení a je dynamickým rozšířením logiky $\mathsf{S5}$, tedy logiky pro pravdivou, plně introspektivní znalost. Studium této teorie nás přivedlo k otázce veřejného prohlášení pro logiku *přesvědčení*, na níž se nám v dostupné literatuře nepodařilo dohledat odpověď. Obsah dalších kapitol je tak snahou o vyřešení této otázky a výsledky v nich uvedené považujeme za vlastní přínos této práce.

Ve čtvrté kapitole se tedy pokusíme vytvořit logiku veřejného prohlášení pro systémy, v nichž neplatí axiom T, a tudíž znalost v nich už nemusí být pravdivá. Jak odůvodníme v úvodu této kapitoly, v takových systémech bychom rádi uměli modelovat i prohlášení, které nemusí být nutně pravdivé. Vytvoříme tedy novou sémantiku veřejného prohlášení, které budeme nazývat *přesvědčivé* veřejné prohlášení. K nové sémantice vytvoříme i nové axiomatické systémy.

Pátá kapitola bude pokusem o vytvoření logiky veřejného prohlášení pro systémy, v nichž namísto axiomu T přijmeme slabší axiom D, a znalost v nich tedy stále nemusí být pravdivá, ale alespoň nesmí být sporná. Ukážeme, že pro tyto systémy nelze převzít definici veřejného prohlášení z předchozí kapitoly, protože ta nezachovává bezespornost znalosti. Můžeme rovnou předeslat, že žádné naše pokusy o její nápravu nepovedou k uspokojivému řešení.

Šestá kapitola je pak vyhrazena důkazům úplnosti systémů vytvořených ve čtvrté kapitole. Setkáme se v ní s konstrukcí tzv. kanonického modelu, což je jedna z nejběžnějších metod důkazu úplnosti v modálních logikách. Pomocí této poměrně složité konstrukce budeme dokazovat úplnost systémů veřejného prohlášení *s obecnou znalostí*. Předtím ale předvedeme důkaz úplnosti systémů *bez obecné znalosti*, a tady využijeme naopak velmi snadnou metodu pomocí překladové funkce, což nám umožní právě již zmíněná expresivita jazyka veřejného prohlášení bez obecné znalosti. V obou případech budeme vycházet z důkazů úplnosti pro logiku pravdivého veřejného prohlášení uvedených v [Dit08].

2 Multiagentní epistemická logika

Výklad epistemické logiky v této kapitole je svým uspořádáním přizpůsoben našim potřebám v dalších kapitolách, ale všechny pojmy a tvrzení zde uvedené jsou převzaty z literatury, konkrétně z knih *Reasoning About Knowledge* ([Fag95]) a *Dynamic epistemic logic*([Dit08]). Všechna tvrzení v této kapitole také uvádíme bez formálního důkazu a odkazujeme na příslušnou literaturu.

2.1 Jazyk a sémantika

Pro zachycení znalosti budeme využívat tzv. sémantiku možných světů a pro její výklad nám posloužily úvodní kapitoly knihy [Fag95]. Idea sémantiky možných světů je taková, že vedle skutečného stavu věcí může agent na základě informací, které má k dispozici, uvažovat i další alternativy možného stavu věcí. Agentovi pak přisoudíme znalost jisté skutečnosti v případě, že je tato skutečnost pravdivá ve všech světech, které považuje za možné. Sémantiku možných světů vyjádříme pomocí tzv. kripkovského modelu.

Nejprve si ale nadefinujme jazyk. V celém dalším textu budeme předpokládat, že máme skupinu n agentů (budeme je označovat $a, b, \ldots$), a neprázdnou množinu atomárních tvrzení pro vyjádření základních skutečností o světě (budeme je značit $p, q, \ldots$). Pro vyjádření znalostí agentů využijeme modální operátory $K_a, K_b, \ldots$, každý pro jednoho z agentů. Výraz $K_a\varphi$ budeme (alespoň prozatím) číst „agent a ví φ“.

Definice 2.1 (Jazyk epistemické logiky)**.** *Je dána konečná množina agentů A velikosti n a spočetná množina atomů P. Jazyk $\mathcal{L}_n$ je definován induktivně následujícím předpisem*

$$\varphi := p \mid \neg\varphi \mid (\varphi \wedge \varphi) \mid K_a\varphi,$$

kde $a \in B$ a $p \in P$.

Výrokové konstanty $\perp$ a $\top$ definujeme pomocí libovolného pevného $p \in P$ následovně:

$$\begin{aligned} \perp &:= (p \wedge \neg p), \\ \top &:= \neg\perp, \end{aligned}$$

a disjunkce, implikace a ekvivalence jsou definovány obvyklým způsobem:

$$\begin{aligned} (\varphi \vee \psi) &:= \neg(\neg\varphi \wedge \neg\psi), \\ (\varphi \rightarrow \psi) &:= (\neg\varphi \vee \psi), \\ (\varphi \leftrightarrow \psi) &:= ((\varphi \rightarrow \psi) \wedge (\psi \rightarrow \varphi)). \end{aligned}$$

V celé této práci budeme symboly $\bot$, $\top$, $\vee$, $\rightarrow$ a $\leftrightarrow$ chápat tak, jak je uvedeno v této definici, a v definicích dalších jazyků, které se dále objeví, už je explicitně uvádět nebudeme.

Definice 2.2 (Kripkovský model)**.** *Kripkovský model (pro n agentů) je struktura $M = (S, R_1, ..., R_n, V)$, kde*

- *$S \neq \emptyset$ je množina možných světů (někdy ji budeme nazývat nosnou množinou modelu M a značit $\mathcal{D}(M)$),*
- *$R_a \subseteq S \times S$ je binární relace pro každého agenta $a \in A$,*
- *$V : P \rightarrow \mathcal{P}(S)$ je funkce valuace, která každému $p \in P$ přiřadí množinu $V_p \subseteq S$ takových světů, v nichž je p pravdivé.*

Relace R_a určuje množinu světů, které agent a považuje za možné. Přesněji, ve světě s považuje agent a za možné právě ty světy t, pro něž platí sR_at. Tuto relaci budeme nazývat *relací dosažitelnosti.*

V dalším textu se setkáme také s pojmem *kripkovského rámce.* Ten získáme z definice kripkovského modelu vynecháním valuace, tedy uvážíme-li pouze množinu S možných světů a na ní binární relace $R_1, \ldots R_n$.

Symboly $\forall$ a $\exists$ užité v následující definici, a i v dalším textu, jsou zkratky pro výrazy „pro každé“ a „existuje“.

Definice 2.3 (Sémantika epistemické logiky)**.** *Je dán kripkovský model M= (S,R_1,..., R_n,V) pro množinu agentů A a množinu atomů P. Splněnost formule ve světě s modelu M je definována následovně:*

$$\begin{array}{rll} M, s \models p & \textit{právě tehdy, když} & s \in V_p \\ M, s \models \neg\varphi & \textit{právě tehdy, když} & M, s \not\models \varphi \\ M, s \models \varphi \wedge \psi & \textit{právě tehdy, když} & M, s \models \varphi \text{ a } M, s \models \psi \\ M, s \models K_a\varphi & \textit{právě tehdy, když} & \forall t \in S \ \textit{takové, že } s\ R_a t \textit{ platí } M, t \models \varphi \end{array}$$

Duální operátor k operátoru K_a budeme značit $\hat{K}_a$ a snadno se ukáže, že splněnost formule $\hat{K}_a\varphi$ (tedy formule $\neg K_a \neg\varphi$) je dána následovně:

$$M, s \models \hat{K}_a\varphi \textit{ právě tehdy, když } \exists t \in S \ \textit{ takové, že } s\ R_a t \textit{ a platí } M, t \models \varphi$$

Výraz $\hat{K}_a\varphi$ budeme číst „agent a považuje za možné φ“.

Výraz $M, s \models \varphi$ čteme „ve světě s modelu M je splněna φ“, nebo „φ je pravdivá ve světě s modelu M“, nebo také „φ platí ve světě s modelu M“. Řekneme, že formule φ platí v modelu M (píšeme $M \models \varphi$), jestliže φ platí v každém světě modelu M, neboli $M, s \models \varphi$ pro každé $s \in \mathcal{D}(M)$. Podobně *řekneme, že formule φ platí v třídě kripkovských struktur $\mathcal{X}$ (píšeme $\mathcal{X} \models \varphi$), jestliže $M \models \varphi$ pro každé $M \in \mathcal{X}$.*

V dalším textu se nám bude hodit ještě označení pro extenzi *formule φ v modelu, tedy podmnožinu možných světů, v nichž je formule φ splněna:*

$$\|\varphi\|_M := \{s \in \mathcal{D}(M); M, s \models \varphi\}.$$

Jednou z výhod kripkovské sémantiky, kterou také v této práci budeme často využívat, když budeme chtít určitou situaci ilustrovat na příkladě, je to, že se na model můžeme dívat jako na ohodnocený orientovaný graf. Uzly grafu odpovídají možným světům a ohodnocení uzlů vyjadřuje splněnost atomických tvrzení. Hrany v grafu odpovídají relaci dosažitelnosti a jsou ohodnoceny indexy agentů.

Vraťme se ještě k relaci dosažitelnosti. V dalším oddíle uvidíme, že na ni lze klást dodatečné požadavky, a určovat tím různé vlastnosti znalosti. Tyto ale ponechme zatím stranou a uveďme si dvě vlastnosti, které budou při výše zavedené sémantice platit, ať už bude relace dosažitelnosti jakákoli.

První z nich je agentova znalost všech logických důsledků jeho znalosti. Jestliže agent ví $\varphi \to \psi$ a zároveň ví φ, znamená to, že ve všech světech, které považuje za možné, je pravdivé $\varphi \to \psi$ a φ. Tedy ve všech světech, které agent považuje za možné, musí být pravdivé ψ, a agent tedy ví ψ. Vyjádřeme si tuto platnost v následujícím tvaru:

$$K_a(\varphi \to \psi) \to (K_a\varphi \to K_a\psi).$$

Podobně snadno můžeme ukázat, že agent ví všechny formule, které platí v dané struktuře. Jestliže φ je pravdivá ve všech možných světech struktury M, pak musí být pravdivá i ve všech světech, které agent považuje za možné v libovolném daném světě struktury M, tedy v každém možném světě musí platit $K_a\varphi$:

$$\text{pro každý model } M, \text{ jestliže } M \models \varphi, \text{ pak } M \models K_a\varphi.$$

Tyto dvě vlastnosti nám spolu s výrokovou logikou dají axiomatiku základní epistemické logiky, jejímž rozšířením vzniknou všechny další systémy, se kterými budeme dále pracovat.

2.2 Axiomatický systém

Definice 2.4 (Epistemická logika K_n)**.** *Sytém K_n je tvořen následujícími axiomy a odvozovacími pravidly:*

(VT)	*všechny výrokové tautologie*	
(K)	$K_a(\varphi \to \psi) \to (K_a\varphi \to K_a\psi)$	*(distribuce znalosti)*
(MP)	$\dfrac{\varphi, \varphi \to \psi}{\psi}$	*(modus ponens)*
(NecK)	$\dfrac{\varphi}{K_a\varphi}$	*(přidání nutnosti znalosti)*

Důkazem *formule* φ *v systému* X *budeme nadále rozumět konečnou posloupnost formulí* $\varphi_1, ..., \varphi_n$ *takovou, že* $\varphi_n = \varphi$*, a každá* φ_i *je instancí některého axiomu z* X *nebo ji lze odvodit pomocí některého odvozovacího pravidla systému* X *z formulí vyskytujících se v posloupnosti* $\varphi_1, ..., \varphi_n$ *před ní. Řekneme, že formule* φ *je v systému* X dokazatelná *(píšeme* $\mathsf{X} \vdash \varphi$*), jestliže existuje její důkaz v* X*. Systém* X *nazveme* konzistentním*, jestliže v něm není dokazatelný spor.*

Systém X *prohlásíme za* korektní *vůči třídě kripkovských struktur* $\mathcal{X}$*, jestliže pro každou formuli* φ *platí*

$$\mathsf{X} \vdash \varphi \Rightarrow \mathcal{X} \models \varphi.$$

Systém X *prohlásíme za* úplný *vůči třídě kripkovských struktur* $\mathcal{X}$*, jestliže pro každou formuli* φ *platí*

$$\mathcal{X} \models \varphi \Rightarrow \mathsf{X} \vdash \varphi.$$

Již jsme zmínili, že znalosti lze přisuzovat některé další vlastnosti, jejichž přijetí či odmítnutí zpravidla závisí na konkrétním užití daného sytému. Aniž bychom se tedy pouštěli do vlastních úvah o tom, které z nich je za jakých okolností vhodné přijmout, vyjmenujme si ty nejběžnější, s jejichž některými kombinacemi budeme v této práci zacházet prostě jako s různými alternativami:[1]

(T)	$K_a\varphi \to \varphi$	*(pravdivost znalosti)*
(D)	$\neg K_a\bot$	*(bezespornost znalosti)*
(4)	$K_a\varphi \to K_aK_a\varphi$	*(pozitivní introspekce)*
(5)	$\neg K_a\varphi \to K_a\neg K_a\varphi$	*(negativní introspekce)*

[1]Používáme zde tradiční značení, které se v literatuře ustálilo během vývoje modálních logik. Písmenem D bývá zpravidla označována formule $\Box\varphi \to \Diamond\varphi$, kde $\Box$ je modální operátor nutnosti a $\Diamond$ je operátor k němu duální (odtud také písmeno D, které je zřejmě zkratkou anglického „diamond“, tedy pojmenování značky $\Diamond$). Formuli $\neg\Box\bot$ a formuli $\Box\varphi \to \Diamond\varphi$ lze ovšem ekvivalentně přidat jako axiom k základní logice K (tedy $\mathsf{K} + \neg\Box\bot = \mathsf{K} + \Box\varphi \to \Diamond\varphi$), můžeme také říci, že tyto dvě formule axiomatizují stejnou třídu rámců. Označovat formuli $\neg\Box\bot$ písmenem D tedy dává dobrý smysl.

Axiomy (4) a (5) vyjadřují, že agent ví o svých znalostech, a zároveň ví o svých neznalostech. Poznamenejme jen, že tyto axiomy, a zejména druhý z nich, bývají považovány za příliš silné, a to obzvláště pro lidské agenty.

U prvního z výše uvedených, tedy axiomu (T), se přece jen pozastavme, protože ten zaujímá v této práci důležitou roli. Doposud jsme modální operátor K_a interpretovali jako „znalost", uvědomme si však, že znalost zpravidla nazýváme znalostí jen v případě, že je pravdivá. Řekneme například „Markéta ví, že má dnes narozeniny", jen pokud je v ten den skutečně má. Pokud to však není pravda, nedává taková věta moc dobrý smysl, a ve stejné situaci řekneme spíše „Markéta je přesvědčena, že má dnes narozeniny". Pravdivost znalosti vyjadřuje právě axiom (T), a přes různost názorů na to, jaké vlastnosti by měla znalost mít, panuje docela shoda v tom, že axiom (T) je tím, co odlišuje znalost od přesvědčení[2]. V tomto duchu rozlišuje znalost a přesvědčení již Hintikka v monografii *Knowledge and Belief*([Hin62]), která se stala stěžejním dílem moderní epistemické logiky. Pro filozofické úvahy o pojetí znalosti jakožto pravdivého odůvodněného přesvědčení lze odkázat například na článek E.L.Gettiera *Is Justified True Belief Knowledge?*([Get63]).

Podívejme se ještě na zbývající axiom (D). Jak jsme právě vysvětlili, odmítnutím axiomu (T) připouštíme situace, kdy je agent přesvědčen o něčem, co ve skutečnosti není pravda, a tím může být i spor. Chceme-li uvažovat agenty, kteří se sice mohou ve svém přesvědčení mýlit, ale ne až tak, že by přijali spor, nahradíme axiom (T) právě axiomem (D). Ten lze ekvivalentně vyjádřit formulí $K_a\varphi \rightarrow \neg K_a \neg\varphi$ a znamená tedy, že přijme-li agent mezi své přesvědčení nějakou φ, nemůže zároveň přijmout její negaci.

Rozšířením systému K_n o vybrané kombinace těchto čtyř axiomů nadefinujeme všechny systémy, kterými se v dalších kapitolách budeme zabývat (resp. jejich dynamickým rozšířením). Ze systémů zahrnujících axiom (T), nás bude zajímat jen logika $\mathsf{S5}_n$, která má vedle axiomu (T) ještě axiomy (4) a (5). Logika $\mathsf{S5}_n$ bývá přijímána jako „ta pravá" logika znalosti a na ní je také založena logika pravdivého veřejného prohlášení, z níž v této práci vycházíme.

V rámci systémů bez axiomu (T) rozlišíme ještě dvě skupiny, totiž tu, v níž místo axiomu (T) přijmeme slabší axiom (D), a tu, v níž axiom (T) bez náhrady odmítneme, tedy připustíme sporné agenty. Uvnitř každé z těchto skupin už se jednotlivé systémy budou lišit jen mírou introspekce, přičemž axiom (5) přijmeme jen za současného přijetí axiomu (4). Poznamenejme ještě, že podobně prominentní postavení, jako zaujímá systém $\mathsf{S5}_n$ v logice

[2] V anglicky psané literatuře se zpravidla užívá termínů „knowledge" a „belief". Obzvláště pro termín „belief" si lze představit i jiné překlady, a není nám známo, zda je některý z nich v česky psané literatuře ustálen. Budeme se proto držet termínu „přesvědčení", který se nám zdá nejvýstižnější.

znalosti, zaujímá v logice *přesvědčení* systém $\mathsf{KD45}_n$. Ke specifičnosti těchto dvou systémů se ještě dostaneme.

V následující definici zápis $X+\varphi$ označuje axiomatický systém obsahující všechny axiomy a odvozovací pravidla systému X, a navíc axiom φ.

Definice 2.5. *Nadefinujme si následující rozšíření systému* K_n*:*

$$\begin{array}{lll} & \mathsf{KD}_n := \mathsf{K}_n + (\mathsf{D}) & \\ & \mathsf{KD4}_n := \mathsf{KD}_n + (\mathsf{4}) & \mathsf{K4}_n := \mathsf{K}_n + (\mathsf{4}) \\ \mathsf{S5}_n := \mathsf{K}_n+(\mathsf{T})+(\mathsf{4})+(\mathsf{5}) & \mathsf{KD45}_n := \mathsf{KD4}_n + (\mathsf{5}) & \mathsf{K45}_n := \mathsf{K4}_n + (\mathsf{5}) \end{array}$$

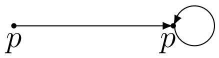
Jak už jsme dříve naznačili, některé vlastnosti znalosti lze splnit omezením třídy kripkovských struktur dodatečnou podmínkou na relaci dosažitelnosti. Vlastnosti vyjádřené axiomy (T), (D), $(\mathsf{4})$ a $(\mathsf{5})$ mezi ně patří. Uvědomme si například, že je-li relace dosažitelnosti modelu M taková, že z každého světa modelu M vede nějaká hrana (tedy relace je seriální, jak uvidíme níže), splňuje model M axiom (D), tedy v každém jeho světě platí formule $\neg K_a\bot$. V libovolném světě libovolného modelu je totiž splněna formule $\top$, a existence světa dosažitelného z s tak zaručuje splněnost formule $\hat{K}_a\top$. Ta je ovšem s formulí $\neg K_a\bot$ ekvivalentní.

Vyjmenujme si nyní ty podmínky na relaci dosažitelnosti, které tímto způsobem odpovídají vlastnostem (T), (D), $(\mathsf{4})$ a $(\mathsf{5})$:

- reflexivita: pro každé u uRu
- serialita: pro každé u existuje v takové, že uR_av
- tranzitivita: pro každé u, v, w pokud uR_av a vR_aw, pak uR_aw
- euklidovskost: pro každé u, v, w pokud uR_av a uR_aw, pak vR_aw

Podobně jako jsme ukázali, že axiom (D) je splněn ve všech seriálních kripkovských modelech, dá se ukázat, že axiom (T) je splněn ve všech reflexivních modelech, axiom $(\mathsf{4})$ ve všech tranzitivních modelech a axiom $(\mathsf{5})$ ve všech euklidovských modelech. Důkazy těchto ostatních tvrzení lze nalézt v [Fag95, str.32].

Můžeme se ptát, zda pro tato tvrzení neplatí i opačné implikace, tedy zda například každý model splňující axiom (T) už je reflexivní. Na následujícím příkladě, převzatém opět z [Fag95, str.59], si ukažme, že tomu tak být nemusí.



Vidíme, že v každém světě tohoto modelu je splněno $Kp \rightarrow p$, a přitom levý ze světů není reflexivní. Uvedená tvrzení ovšem platit budou, jestliže se přesuneme z úrovně modelů na úroveň rámců, tedy nebudeme-li uvažovat konkrétní ohodnocení množiny možných světů, ale jen relaci dosažitelnosti na této množině. Ukažme si například, že je-li axiom (T) splněn v každém modelu nad nějakým kripkovským rámcem, pak už je tento rámec reflexivní.

Budeme postupovat kontrapozicí, tedy předpokládejme, že daný rámec není reflexivní, a ukažme, že pak existuje model nad tímto rámcem, v němž neplatí axiom (T). Stačí vzít model o jednom světu, který není reflexivní pro relaci R_a a není v něm splněn atom p. V tomto světě je splněno $K_a p$ a není v něm splněno p, tedy ani $K_a p \rightarrow p$.

Nyní můžeme říct, že axiom (T) *definuje* třídu všech reflexivních kripkovských rámců, neboli rámec je reflexivní právě tehdy, když v každém modelu nad tímto rámcem platí axiom (T). Podobně se dá ukázat, že axiom (D) definuje třídu všech seriálních, axiom (4) třídu všech tranzitivních a axiom (5) třídu všech euklidovských kripkovských rámců. Pro podrobnější výklad definovatelnosti tříd rámců můžeme odkázat například na třetí kapitolu knihy o modálních logikách [Bla01].

V souladu s touto korespondencí mezi axiomy a vlastnostmi relace dosažitelnosti si zaveďme následující značení:

- $\mathcal{K}$ pro třídu všech kripkovských modelů,
- $\mathcal{K}4$ pro třídu všech tranzitivních (kripkovských) modelů,
- $\mathcal{K}45$ pro třídu všech tranzitivních euklidovských modelů,
- $\mathcal{KD}$ pro třídu všech seriálních modelů,
- $\mathcal{KD}4$ pro třídu všech seriálních tranzitivních modelů,
- $\mathcal{KD}45$ pro třídu všech seriálních tranzitivních modelů,
- $\mathcal{S}5$ pro třídu všech reflexivních tranzitivních euklidovských modelů.

Relace splňující všechny podmínky z definice třídy $\mathcal{S}5$ se nazývá *ekvivalence*[3]. Ekvivalence je hodně specifická relace, s čímž také souvisí oblíbenost systému S5, a vlastně i systému KD45, jemuž odpovídající relace dosažitelnosti má k ekvivalenci také velmi blízko. K tomu se ale ještě dostaneme v posledním oddíle této kapitoly.

Nyní už můžeme vyslovit větu o korektnosti a úplnosti pro všechny výše zavedené systémy. Její důkaz lze nalézt v [Fag95] a uvádět ho zde nebudeme, jen poznamenejme, že úplnost se dokazuje pomocí kanonického modelu, s jehož konstrukcí se podrobně seznámíme v šesté kapitole v důkaze úplnosti logiky veřejného prohlášení.

[3] Relace ekvivalence bývá definována jako reflexivní *symetrická* tranzitivní relace, ale dá se ukázat, že v třídě reflexivních tranzitivních rámců jsou už podmínky na symetrii a euklidovskost ekvivalentní.

Věta 2.6 (o korektnosti a úplnosti). *Pro každou formuli $\varphi \in \mathcal{L}_n$ platí*

$$\mathsf{K}_n \vdash \varphi \Leftrightarrow \mathcal{K} \models \varphi \qquad \mathsf{KD}_n \vdash \varphi \Leftrightarrow \mathcal{KD} \models \varphi$$

$$\mathsf{K4}_n \vdash \varphi \Leftrightarrow \mathcal{K}4 \models \varphi \qquad \mathsf{KD4}_n \vdash \varphi \Leftrightarrow \mathcal{KD}4 \models \varphi$$

$$\mathsf{K45}_n \vdash \varphi \Leftrightarrow \mathcal{K}45 \models \varphi \qquad \mathsf{KD45}_n \vdash \varphi \Leftrightarrow \mathcal{KD}45 \models \varphi \qquad \mathsf{S5}_n \vdash \varphi \Leftrightarrow \mathcal{S}5 \models \varphi$$

2.3 Skupinová znalost

2.3.1 Jazyk a sémantika

Vedle operátoru pro znalost se v multiagentní epistemické logice často zachází ještě s operátory C_B pro obecnou znalost a D_B pro distribuovanou znalost. Obě tyto znalosti se přisuzují nikoli jednomu agentovi, nýbrž určité skupině agentů. Distribuovanou znalost zde uvádíme jen pro úplnost, protože v dalším textu ji nebudeme potřebovat. Uveďme jen, že je to taková znalost, kterou můžeme odvodit, uvážíme-li dohromady všechny znalosti jednotlivých agentů dané skupiny. Naopak obecná znalost zastává v logice veřejného prohlášenou význačnou roli, podívejme se na ni tedy podrobněji.

Dobrým příkladem ze života pro vysvětlení obecné znalosti jsou třeba zákony a předpisy. Můžeme například říct, že mezi občany České republiky, kteří mají řidičské oprávnění, je obecně známo, že se jezdí vpravo. A neznamená to jen, že všichni řidiči vědí, že se jezdí vpravo, ale mimo jiné také, že všichni řidiči vědí, že všichni řidiči vědí, že se jezdí vpravo. A to je rozdíl, protože první iterace stačí například (teoreticky) k tomu, aby na silnici nedošlo ke srážce dvou aut z důvodu nedodržení směru jízdy, nestačí to ale například k tomu, aby se mohl každý řidič cítit v tomto ohledu na silnici bezpečně. K tomu totiž každý řidič potřebuje vědět, že o přikázaném směru jízdy vědí i ostatní řidiči. Pro další iterace už se obtížněji hledají interpretace, ale k obecné znalosti zkrátka dospějeme, uvážíme-li současně všechny četnosti n iterace modality „všichni vědí“ až po $n = \infty$. Uveďme si raději formální definici.

Pro zavedení obecné znalosti je užitečné nadefinovat nejprve operátor E_B pro znalost společnou všem agentům ze skupiny B. Ta se dá snadno nadefinovat pomocí individuální znalosti následovně:

$$E_B\varphi := \bigwedge_{a \in B} K_a\varphi.$$

Formuli $E_B\varphi$ čteme „všichni agenti ze skupiny B vědí φ“.

Protože množina B je konečná, můžeme formuli $E_B\varphi$ vyjádřit v už definovaném jazyce $\mathcal{L}_n$ a považovat ji za zkratku. To však není případ formule $C_B\varphi$ zachycující obecnou znalost, kterou pomocí operátoru E_B můžeme vyjádřit jen jako nekonečnou konjunkci:

$$C_B\varphi = \bigwedge_{n=1}^{\infty} E_B^n\varphi, \tag{1}$$

kde $E_B^1\varphi = E_B\varphi$ a $E_B^{n+1} = E_B E_B^n\varphi$.

Chceme-li tedy zacházet s obecnou znalostí, musíme nejprve rozšířit jazyk.

Definice 2.7 (Jazyk s obecnou znalostí)**.** *Je dána konečná množina agentů A velikosti n a spočetná množina atomů P. Jazyk $\mathcal{L}_n^C$ je definován induktivně následujícím předpisem*

$$\varphi := p \,|\, \neg\varphi \,|\, (\varphi \wedge \varphi) \,|\, K_a\varphi \,|\, C_B\varphi,$$

kde $a \in B$, $B \subseteq A$ a $p \in P$.

Začněme tentokrát rovnou rozlišovat mezi znalostí a přesvědčením. V případě, že operátor C_B interpretujeme v nějaké reflexivní třídě struktur, čteme formuli $C_B\varphi$ „φ je obecnou znalostí ve skupině agentů B“, a v případě nereflexivních struktur ji čteme „φ je obecným přesvědčením ve skupině agentů B“. Rozdíl mezi těmito dvěma modalitami je analogický rozdílu mezi znalostí a přesvědčením, totiž obecné přesvědčení nemusí být na rozdíl od obecné znalosti pravdivé. Obecné přesvědčení, které skutečně není pravdivé, budeme v dalším textu někdy nazývat *mylným* obecným přesvědčením.

Podívejme se zpětně, zda by se tento rozdíl mezi obecnou znalostí a obecným přesvědčením neměl projevit již v jejich vyjádření jako nekonečné konjunkce. A skutečně, v rovnosti (1) jsme v případě obecné znalosti mohli začít nulou, tedy zahrnout do konjunkce také $E_B^0\varphi = \varphi$. Uvědomme si ale, že z reflexivity relace dosažitelnosti už splněnost φ plyne z $K_a\varphi$ pro libovolné $a \in B$, a není tedy nutné formuli φ v definici explicitně uvádět. Rovnost (1) je tedy v tomto tvaru univerzální pro obecnou znalost i obecné přesvědčení.

Pro sémantiku jazyka $\mathcal{L}_n^C$ lze použít tytéž kripkovské struktury jako pro jazyk bez obecné znalosti (viz. definice 2.2). Relace dosažitelnosti, pomocí níž se v těchto strukturách nadefinuje splněnost formule $C_B\varphi$, je dána relacemi dosažitelnosti jednotlivých agentů z B. Položme nejprve

$$R_{E_B} = \bigcup_{b \in B} R_b$$

a poté vezměme tranzitivní uzávěr relace R_{E_B}, neboli nejmenší relaci $R_{E_B}^+$ takovou, že:

1. $R_{E_B} \subseteq R^+_{E_B}$
2. pro každé x, y, z, pokud $xR^+_{E_B}y$ a $yR^+_{E_B}z$, pak $xR^+_{E_B}z$.

Sémantika jazyka zahrnující obecnou znalost je pak dána následující definicí:

Definice 2.8 (Sémantika obecné znalosti)**.** *Je dán kripkovský model $M = (S, R_1, ..., R_n, V)$ pro množinu agentů A a množinu atomů P, a φ je formule v jazyce $\mathcal{L}^C_n$. Definici splněnosti formule φ ve světě s modelu M získáme rozšířením definice 2.3 o následující podmínku:*

$$M, s \models C_B\varphi \text{ právě tehdy, když pro každé } t \in R^+_{E_B} M, t \models \varphi.$$

V dalším textu budeme místo $R^+_{E_B}$ psát jednoduše R_B.

Pozastavme se opět u rozdílu mezi obecnou znalostí a obecným přesvědčením. V případě obecné znalosti bývá operátor C_B definován pomocí *reflexivního* tranzitivního uzávěru R^*, který získáme z tranzitivního uzávěru R^+ dodatečným požadavkem na xR^+x pro každé x. Snadno ale nahlédneme, že je-li relace R_a reflexivní, je její tranzitivní uzávěr automaticky rovněž reflexivním tranzitivním uzávěrem. My jsme zvolili definici pomocí pouze tranzitivního uzávěru, protože tak ji můžeme ve stejné podobě použít i v obou následujících kapitolách, z nichž v jedné budeme zacházet s reflexivní relací R_B, zatímco v druhé už reflexivitu relace R_B požadovat nebudeme.

Na základě předchozí definice a s odkazem na možné znázornění kripkovského modelu jakožto grafu budeme v dalším textu často splněnost formule $C_B\varphi$ ve světě s modelu M neformálně ztotožňovat se splněností formule φ „po celé délce libovolné cesty“ z s v M, a budeme tím myslet cestu podél relace $R^+_{E_B}$.

2.3.2 Axiomatický systém

Rozšíření epistemických systémů definovaných v předešlé podkapitole na systémy s obecnou znalostí, resp. obecným přesvědčením, bychom mohli nadefinovat jednotně, tedy přidat ke všem stejnou množinu axiomů a pravidel pro operátor C_B. V další kapitole ale představíme logiku pravdivého veřejného prohlášení převzatou z knihy [Dit08], v níž jsou zkoumány téměř výhradně systémy založené na logice $\mathsf{S5}_n$, a axiomatika je zde zvolena na míru příslušné třídě kripkovských struktur, mezi jejíž vlastnosti patří reflexivita. Kromě dalšího tak právě ani axiomy pro obecnou znalost zde využité nejsou použitelné pro nereflexivní třídy struktur, resp. systémy bez axiomu (T). Uveďme si tedy axiomatiku systémů s obecnou znalostí zvlášť pro $\mathsf{S5}_n$ a zvlášť pro ostatní výše zavedené systémy. Axiomatiku pro ty ostatní převezmeme z [Fag95].

Definice 2.9. *Axiomatický systém* $\mathsf{S5}_n^{\mathsf{C}}$ *vznikne ze systému* $\mathsf{S5}_n$ *přidáním následujících axiomů a odvozovacího pravidla:*

$(\mathsf{C1})$	$C_B(\varphi \to \psi) \to (C_B\varphi \to C_B\psi)$	*(distribuce obecné znalosti)*
$(\mathsf{C2})$	$C_B\varphi \to (\varphi \wedge E_B C_B \varphi)$	*(obecná znalost jako pevný bod[4])*
$(\mathsf{C3})$	$C_B(\varphi \to E_B\varphi) \to (\varphi \to C_B\varphi)$	*(indukce pro obecnou znalost)*
(NecC)	$\dfrac{\varphi}{C_B\varphi}$	*(přidání nutnosti obecné znalosti)*

Axiom $(\mathsf{C1})$ a pravidlo (NecC) jsou podobně jako axiom (K) a pravidlo (NecK) splněny v libovolné kripkovské struktuře. Snadno nahlédneme, že je-li v každém světě podél nějaké cesty v kripkovském modelu splněna formule $\varphi \to \psi$ a zároveň je podél celé této cesty splněna formule φ, je podél celé této cesty splněna i formule ψ. Je rovněž zřejmé, že je-li formule φ splněna v celém modelu, je splněna i podél libovolné cesty vedoucí z libovolného světa tohoto modelu.

Axiom $(\mathsf{C2})$ říká, že jestliže φ je obecnou znalostí ve skupině agentů B, pak už všichni agenti ze skupiny B vědí, že φ je obecnou znalostí. Říká se v něm ale také to, že obecná znalost je pravdivá, a to je důvod, proč axiom pevného bodu nelze v tomto tvaru použít pro systémy bez axiomu (T).

Axiom $(\mathsf{C3})$ je axiomem pro odvození obecné znalosti. Konkrétně se v něm říká, že obecnou znalost φ odvodíme z předpokladu obecné znalosti $\varphi \to E_B\varphi$ a současné pravdivosti φ. Z toho opět můžeme vytušit, že tento axiom nebude použitelný pro systémy bez axiomu (T), protože v nich bychom potřebovali umět odvodit formuli $C_B\varphi$ i pro nějaké nepravdivé φ.

Podívejme se na platnost tohoto axiomu v třídě $\mathcal{S}5$ kripkovských struktur (tedy jeho korektnost) trochu podrobněji. Nejen proto, abychom si ukázali, že neplatí v nereflexivních třídách struktur, ale také proto, že na podobný problém narazíme, až se v jedné z dalších kapitol budeme pokoušet upravit pravidlo pro odvození obecné *znalosti* po prohlášení na pravidlo pro odvození obecného *přesvědčení* po prohlášení. Důkaz korektnosti axiomu $(\mathsf{C3})$ vůči třídě $\mathcal{S}5$ lze nalézt v [Dit08, str.37] a my si zde uvedeme jen jeho neformální výklad.

Vezměme si tedy libovolný model M z třídy $\mathcal{S}5$ a jeho libovolný svět s, a ukažme si, že za předpokladů $M, s \models C_B(\varphi \to E_B\varphi)$ a $M, s \models \varphi$ už platí $M, s \models C_B\varphi$. Vezmeme-li si tedy libovolnou cestu z s vedoucí přes sjednocení relací všech agentů z B, máme dokázat, že po celé délce této cesty

[4] V [Dit08] je axiom $(\mathsf{C2})$ pojmenován „mix“. My volíme vyjádření pomocí pevného bodu, stejně jako u odpovídajícího axiomu pro systémy bez axiomu (T), kde také uvádíme poznámku k jeho původu.

platí φ. Ve světě s platí φ z předpokladu. Protože je svět s reflexivní, platí v něm díky předpokladu $C(\varphi \to E_B\varphi)$ také $\varphi \to E_B\varphi$, a tedy i $E_B\varphi$. Díky tomu platí φ i dalším světě na dané cestě z s. V něm ale z předpokladu $C(\varphi \to E_B\varphi)$ platí také $\varphi \to E_B\varphi$, a stejným způsobem jako v prvním kroku se φ postupně rozšíří po celé délce dané cesty s, tedy skutečně bude v s splněno $C_B\varphi$. Kdyby ovšem svět s nebyl reflexivní, splněnost formule φ by se ze světa s vůbec nezačala šířit. Axiom ($\mathsf{C3}$) tedy nemůžeme převzít pro systémy bez axiomu (T).

Důkaz úplnosti systému $\mathsf{S5}_n^{\mathsf{C}}$ lze nalézt v [Dit08], my si zde opět jen vyslovme větu bez důkazu.

Věta 2.10. *Pro každou formuli $\varphi \in \mathcal{L}_n^C$ platí:*

$$\mathsf{S5}_n^{\mathsf{C}} \vdash \varphi \Leftrightarrow \mathcal{S}5 \models \varphi.$$

Přejděme nyní k rozšíření axiomatiky ostatních výše zavedených systémů, tedy systémů bez axiomu (T). Ukázali jsme, že abychom měli v axiomatice ošetřeno i nepravdivé obecné přesvědčení, nevystačíme si s axiomy a pravidly z předchozí definice. Uvidíme, že axiom pevného bodu se v axiomatice systémů bez axiomu (T) objeví jen lehce pozměněn, a axiom indukce bude nahrazen o něco složitějším odvozovacím pravidlem. Axiom ($\mathsf{C1}$) a pravidlo (NecC) by bylo možné převzít, ale není to třeba, protože už jsou odvoditelné z těch upravených dvou, což si také ukážeme.

Definice 2.11. *Axiomatické systémy $\mathsf{K}_\mathsf{n}^{\mathsf{C}}$, resp. $\mathsf{K4}_n^{\mathsf{C}}$, resp. $\mathsf{K45}_n^{\mathsf{C}}$, resp. $\mathsf{KD}_n^{\mathsf{C}}$, resp. $\mathsf{KD4}_n^{\mathsf{C}}$, resp. $\mathsf{KD45}_n^{\mathsf{C}}$ vzniknou ze systémů K_n, resp. $\mathsf{K4}_n$, resp. $\mathsf{K45}_n$, resp. KD_n, resp. $\mathsf{KD4}_n$, resp. $\mathsf{KD45}_n$ přidáním následujícího axiomu a odvozovacího pravidla:*

(C) $\quad C_B\varphi \to E_B(\varphi \wedge C_B\varphi)$ *(obecné přesvědčení jako pevný bod[5])*

(RC) $\quad \dfrac{\varphi \to E_B(\psi \wedge \varphi)}{\varphi \to C_B\psi}$ *(pravidlo indukce pro obecné přesvědčení)*

Axiom (C) a pravidlo (RC) už jsou korektní vůči libovolné třídě kripkovských struktur, důkaz lze nalézt v [Fag95, str. 35]. Ukažme si ještě, že axiom ($\mathsf{C1}$) a pravidlo (NecC) by nyní byly přebytečné.

Z axiomu (C) máme přímo $\vdash C_B\varphi \to E_B(\varphi \to C_B\varphi)$, a z toho dostaneme pomocí pravidla (RC) $\vdash C_B\varphi \to C_B\psi$. Z toho už dokazatelnost formule $C_B(\varphi \to \psi) \to (C_B\varphi \to C_B\psi)$ dostaneme snadno pomocí výrokové logiky.

[5] Axiom (C) vyjadřuje, že formule $C_B\varphi$ je pevným bodem výrazu $E_B(\varphi \wedge x)$; odtud pojmenování tohoto axiomu. Pravidlo (RC) pak říká, že $C_B\varphi$ je největším takovým bodem. Detailní rozbor obecné znalosti jakožto pevného bodu lze nalézt v jedenácté kapitole knihy [Fag95].

Z $\vdash \varphi$ dospějeme k $\vdash E_B\varphi$ pomocí pravidla (NecK) a výrokové logiky, a z toho už dostaneme $\vdash C_B\varphi$ z pravidla (RC), dosadíme-li v něm za φ konstantu $\top$.

Důkazy úplnosti systémů z poslední definice lze nalézt v [Fag95], nebo je lze z důkazů tam uvedených získat snadnými úpravami.

Věta 2.12. *Pro každou formuli* $\varphi \in \mathcal{L}_n^C$ *platí:*

$$\begin{array}{cc} \mathsf{K}_n^\mathsf{C} \vdash \varphi \Leftrightarrow \mathcal{K} \models \varphi & \mathsf{KD}_n^\mathsf{C} \vdash \varphi \Leftrightarrow \mathcal{K}D \models \varphi \\ \mathsf{K4}_n^\mathsf{C} \vdash \varphi \Leftrightarrow \mathcal{K}4 \models \varphi & \mathsf{KD4}_n^\mathsf{C} \vdash \varphi \Leftrightarrow \mathcal{K}D4 \models \varphi \\ \mathsf{K45}_n^\mathsf{C} \vdash \varphi \Leftrightarrow \mathcal{K}45 \models \varphi & \mathsf{KD45}_n^\mathsf{C} \vdash \varphi \Leftrightarrow \mathcal{K}D45 \models \varphi \end{array}$$

Na závěr tohoto oddílu ještě upozorněme, že rozšířením systémů o obecnou znalost je připravujeme o některé „pěkné“ vlastnosti. Jednou z nich je *kompaktnost*, což je vlastnost, která za předpokladu splnitelnosti každé konečné části množiny formulí zaručuje splnitelnost celé této množiny formulí. Uvažme například množinu formulí $\{E_B^n p; n \in N\} \cup \{\neg C_B p\}$, kde B je skupina alespoň dvou agentů. Je zřejmé, že každá konečná část této množiny je splnitelná, ale celá tato množina splnitelná není. Z toho plyne jistá komplikace v důkazu úplnosti pomocí kanonického modelu, kde se v systémech bez operátoru C_B kompaktnosti využívá. V kapitole 6 ale uvidíme, že tuto překážku lze snadno obejít.

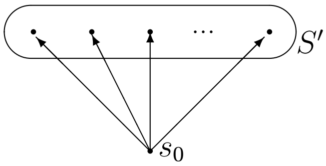
2.4 Jednoagentní systémy

Třebaže se nám v této práci jedná výhradně o multiagentní systémy, pozastavme se ještě na okamžik u jednoagentních variant, konkrétně systémů $\mathsf{S5}_1$ a $\mathsf{KD45}_1$, o jejichž výsadním postavení jsme se již zmínili. Poznamenejme jen ke značení, že u jednoagentních systémů budeme dolní index vynechávat a psát jednoduše $\mathsf{S5}$ a $\mathsf{KD45}$, jak je ostatně běžné.

Především si uvědomme, že na splněnost libovolné formule epistemického jazyka v nějakém světě s mají vliv jen takové světy v modelu, které jsou z tohoto světa dosažitelné. Představujeme-li si tedy model jako graf, stačí vždy uvažovat jen jeho spojitou komponentu danou světem s.

Modely teorií $\mathsf{S5}$ a $\mathsf{KD45}$ mají ovšem ještě dosti specifický tvar. Z vlastností příslušné relace dosažitelnosti plyne, že v případě $\mathsf{S5}$ se stačí zaměřit na modely, v nichž každé dva světy jsou propojeny obousměrnou hranou (včetně hran ze světů do nich samých), tedy každý svět je z každého dosažitelný.

Podobně se v případě $\mathsf{KD45}$ můžeme omezit na modely, v nichž je jeden svět vyčleněn, všechny ostatní světy jsou z tohoto světa dosažitelné, a mezi sebou opět dosažitelné každý z každého. Podobu $\mathsf{KD45}$ modelů si zkusme zachytit následujícím obrázkem.



Svět s_0 intuitivně odpovídá tomu „skutečnému“ světu. Všechny ostatní světy modelu už náleží do množiny S', tedy do množiny světů dosažitelných z s_0. Do obrázku jsme pro jednoduchost nezakreslili žádné hrany mezi světy z S', ale jak už jsme uvedli, je každý spojen s každým. Z euklidovskosti relace dosažitelnosti totiž plyne, že každé dva světy dosažitelné z s_0 jsou obousměrně propojeny, a každý svět dosažitelný z nějakého světa, který je dosažitelný z s_0, je díky tranzitivitě rovněž přímo dosažitelný z s_0. Z euklidovskosti rovněž plyne, že z každého světa, který je odněkud dosažitelný, vede hrana do něj samého. Z toho všeho je tedy snad zřejmé, že zúžíme-li relaci dosažitelnosti daného modelu na množinu S', dospějeme k ekvivalenci.

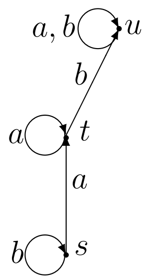
Svět s_0 je tudíž také jediný, který nemusí být z žádného jiného světa dosažitelný, a tedy ani sám ze sebe. Uvědomme si ovšem, že stačí, aby byl svět s_0 dosažitelný z jednoho libovolného světa z S', a je už dosažitelný i ze všech ostatních světů množiny S', a rovněž sám ze sebe. V takovém případě už je tedy daný $\mathsf{KD45}$ model zároveň $\mathsf{S5}$ modelem.

Formální tvrzení vyjadřující tuto charakteristiku modelů $\mathsf{S5}$ a $\mathsf{KD45}$ lze včetně důkazu nalézt v [Fag95, str. 61]. My ho zde uvádět nebudeme, ale využijeme náš neformální výklad tohoto tvrzení k obhájení jiného tvrzení, které se nám bude hodit v kapitole 4. Totiž tvrzení, že kdykoli je v nějakém světě $\mathsf{KD45}$ modelu splněna formule $\hat{K}\varphi$ (tedy agent považuje za možné φ), je už tato formule splněna ve všech světech daného modelu.

Tvrzení 2.13. *Nechť $M = (S, R, V)$ je model z třídy $\mathcal{KD}45$ a s je libovolný svět z S. Jestliže $M, s \models \hat{K}\varphi$, pak $M \models \hat{K}\varphi$ (neboli pro libovolné $t \in S$ $M, t \models \hat{K}\varphi$).*

Důkaz: Splněnost formule $\hat{K}\varphi$ v nějakém světě s je dána existencí světa t, který je dosažitelný z s a platí v něm φ. Jak jsme ovšem právě vyložili, tento svět t je zároveň dosažitelný i ze všech ostatních světů daného modelu, a zaručuje tak splněnost formule $\hat{K}\varphi$ v celém modelu. Za zvláštní zmínku snad stojí jen případ, kdy je tím světem t svět s_0, který nemusí být z ostatních světů dosažitelný. Jak už jsme ovšem také analyzovali, jestliže je svět s_0 dosažitelný z nějakého $s \in S'$ (což je podmínka pro jeho „svědectví“ pravdivosti formule $\hat{K}\varphi$ ve světě s), je už dosažitelný i ze všech ostatních světů. $\square$

Rovnou si ale ukažme, že v multiagentních systémech už se na nic takového spoléhat nemůžeme. Následující příklad je dokladem toho, že v multiagentních modelech je potřeba brát v úvahu i světy, které nejsou dosažitelné přes relaci některého z agentů.



Snadno se ověří, že model na obrázku je modelem $\mathsf{KD45}_2$, tedy modelem, který je seriální, tranzitivní a euklidovský, pro obě relace R_a, R_b. Zároveň vidíme, že svět u není ze světa s dosažitelný ani pro jednoho z agentů. Přesto ho nemůžeme ignorovat, tak, jak bychom mohli v jednoagentním systému. Svět u je totiž důležitý pro vyhodnocení znalosti agenta a ve světě s o znalostech agenta b ve světě t. Je-li například ve světě u splněna formule $\neg p$, je ve světě s splněna formule $K_a K_b \neg p$.

S tím souvisí i fakt, že splněnost formule tvaru $\hat{K}\varphi$ už se tak pěkně nešíří, jako tomu bylo v jednoagentním systému. Je-li například atom p splněn ve světech s a t, a není splněn v u, je ve světě s splněna formule $\hat{K}_a p$, ale ve světě u už nikoli, protože pro agenta a jsou v něm dosažitelné jen samé $\neg p$-světy.

Jak už jsme naznačili, k problému diskutovanému v tomto oddíle se ještě dostaneme. Narazíme na něj totiž v kapitole 4, když se budeme snažit najít takovou definici prohlášení, která by zachovávala serialitu. V jednoagentním systému by se nám to díky tomu, co jsme tu právě vyložili, podařilo, v multiagentním už ovšem nikoli.

3 Pravdivé veřejné prohlášení

V této kapitole vyložíme logiku veřejného prohlášení tak, jak je prezentována v knize [Dit08]. Jedná se o logiku *pravdivého* veřejného prohlášení a je dynamickým rozšířením logiky $\mathsf{S5_n}$ zavedené v předchozí kapitole. Kapitolu rozdělíme do dvou podkapitol, z nichž první bude vyhrazena logice veřejného prohlášení v jazyce pouze s individuální znalostí, a druhá bude rozšířením této logiky o obecnou znalost.

V [Dit08] jsou tyto dvě logiky označovány zkratkami PA a PAC (z anglického Public Announcement). V této práci se nám ale hodí mít v názvu vyjádřen i systém, z něhož vycházíme, protože v další kapitole budeme zkoumat logiky veřejného prohlášení založené na jiných systémech než je $\mathsf{S5_n}$. Zkratky PA, PAC budeme proto uvádět jen jako horní index, a systémy z této kapitoly tedy budeme značit $\mathsf{S5}_n^{\mathsf{PA}}$ a $\mathsf{S5}_n^{\mathsf{PAC}}$.

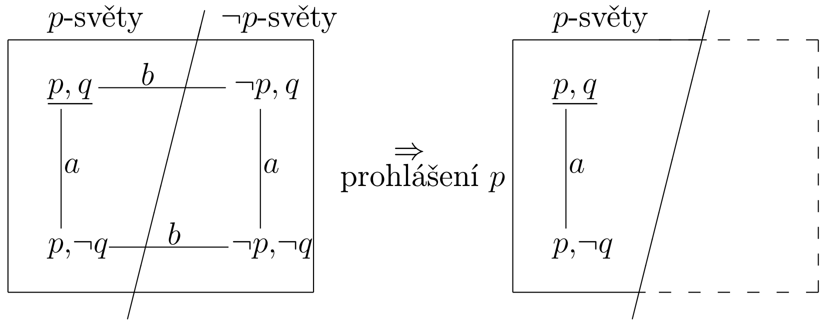
Na úvod ještě poznamenejme, že všechna tvrzení v této kapitole budeme uvádět bez důkazů. Každé tvrzení z této kapitoly totiž bude mít svou obdobu v další kapitole, a tam už si je pečlivě dokážeme. Tvrzení se sice budou vztahovat k jiným systémům, ale jejich důkazy se postupem budou podobat těm z této kapitoly, které lze také případně nalézt v [Dit08].

3.1 Pravdivé prohlášení bez obecné znalosti

3.1.1 Syntax a sémantika

Vzpomeňme si z předchozí kapitoly, že agent má mezi svými znalostmi právě takové formule φ, které jsou pravdivé ve všech světech, jež považuje za možné. Neformálně můžeme říci, že čím více různých světů agent považuje za možné, tím méně má znalostí. Tedy když agent dostane novou informaci, intuitivně očekáváme, že přijetím této informace mezi jeho znalosti se zúží množina světů, které považuje za možné. Na tomto principu je také založena sémantika pravdivého veřejného prohlášení. Konkrétně tedy veřejné prohlášení vyloučí z daného modelu všechny světy, v nichž je prohlašovaná formule nepravdivá. Pak řekneme, že ve světě s modelu M je po prohlášení φ pravdivé ψ právě tehdy, když za předpokladu pravdivosti φ je ψ pravdivé ve světě s zúženého modelu M'.

Zúžení modelu si znázorněme na obrázku. Vzhledem k tomu, že relace dosažitelnosti v modelech teorie $\mathsf{S5_n}$ jsou ekvivalence, budeme v celé této kapitole pro jednoduchost zakreslovat do obrázků jen neorientované hrany, ale představujeme si na nich oboustranné šipky, a dále si ke každému světu představujeme hranu vedoucí z něj do něj samého.



Prohlášením formule p jsme tedy vypustili všechny $\neg p$-světy, a s nimi samozřejmě i patřičné relace. Všimněme si rovnou ještě jedné věci, totiž jak je důležitý požadavek na *pravdivost* prohlašované formule v aktuálním světě (který je na obrázku označen podtržením). V případě, že by formule pravdivá nebyla, jejím prohlášením bychom se připravili o aktuální svět, a těžko bychom pak mohli ve zúženém modelu vyhodnocovat splněnost formulí po prohlášení.

Formální definici si uvedeme za okamžik, nejprve ovšem musíme zavést veřejné prohlášení do jazyka. Následující definice je rozšířením definice epistemického jazyka o dynamický operátor $[\varphi]$.

Definice 3.1 (Jazyk s veřejným prohlášením)**.** *Je dána konečná množina agentů A a spočetná množina atomů P. Jazyk $\mathcal{L}_n^{PA}$ je definován induktivně následujícím předpisem*

$$\varphi := p \,|\, \neg\varphi \,|\, (\varphi \wedge \varphi) \,|\, K_a\varphi \,|\; [\varphi]\,\varphi,$$

kde $a \in B$ a $p \in P$. Formule $[\varphi]\,\psi$ se čte „po prohlášení φ platí ψ“.

Poznamenejme, že interpretace formule $[\varphi]\,\psi$ je lehce problematická. Prohlášením se má totiž rozumět *pravdivé* veřejné prohlášení, ale jak uvidíme po zavedení sémantiky, prohlásit lze takto i *nepravdivou* formuli, dospěje se tím ovšem ke sporu. Neboli jestliže je formule φ v nějakém světě nepravdivá, je v něm pravdivá formule $[\varphi]\,\bot$. Skutečně *pravdivému* prohlášení tak odpovídá spíše duální operátor $\langle\varphi\rangle$, který přímo vyžaduje pravdivost prohlašované formule. V případě, že je formule φ v daném světě nepravdivá, každá formule tvaru $\langle\varphi\rangle\psi$ je v něm prostě vyhodnocena jako nepravdivá.

Tato poznámka snad bude jasnější po přijetí následující definice, která je opět jen rozšířením definice splněnosti z předchozí kapitoly o podmínku pro nově zavedený dynamický operátor.

Vzhledem k tomu, že relace dosažitelnosti v kripkovských modelech pro systém $\mathsf{S5_n}$ je ekvivalence, budeme ji v celé této kapitole značit $\sim_a$.

Definice 3.2 (Sémantika pravdivého veřejného prohlášení). *Je dán kripkovský model $M = (S, \sim_a, V)$ pro množinu agentů A a množinu atomů P. Splněnost formule ve světě s modelu M je definována následovně:*

$$\begin{array}{rll} M,s \models p & \textit{právě tehdy, když} & s \in V_p \\ M,s \models \neg\varphi & \textit{právě tehdy, když} & M,s \not\models \varphi \\ M,s \models \varphi \wedge \psi & \textit{právě tehdy, když} & M,s \models \varphi \textit{ a } M,s \models \psi \\ M,s \models K_a\varphi & \textit{právě tehdy, když} & \forall t \in S \textit{ takové, že } s \sim_a t \textit{ platí } M,t \models \varphi \\ M,s \models [\varphi]\psi & \textit{právě tehdy, když} & M,s \models \varphi \textit{ implikuje } M|_\varphi, s \models \psi, \end{array}$$

kde $M|_\varphi = (S', \sim'_a, V')$ je definováno následovně:

$$\begin{array}{rcl} S' & = & \|\varphi\|_M \\ \sim'_a & = & \sim_a \cap\, (\|\varphi\|_M \times \|\varphi\|_M) \\ V'_p & = & V_p \cap \|\varphi\|_M \end{array}$$

V dalším textu budeme model $M|_\varphi$ často nazývat modelem ořezaným podle *φ, případně jen* ořezaným *modelem.*

Duální operátor $\langle\varphi\rangle$ je tedy definován následovně:

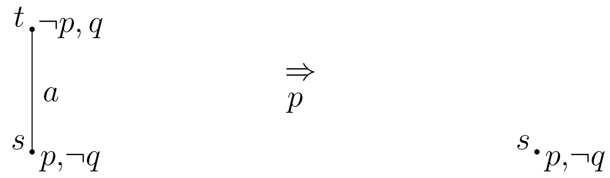
$$M,s \models \langle\varphi\rangle\psi \textit{ právě tehdy, když } M,s \models \varphi \textit{ a zároveň } M|_\varphi, s \models \psi.$$

Nyní si můžeme formálně ukázat, co nastane, když prohlásíme nepravdivou formuli. Předpokládáme-li tedy, že v nějakém světě s modelu M není splněna formule φ, vidíme, že platí $M, s \models [\varphi]\,\psi$ pro libovolné ψ, protože implikace ze sémantické definice je rovnou splněna díky nesplněnému předpokladu (na pravdivost prohlašované formule). Tedy za předpokladu $M, s \models \neg\varphi$ platí $M, s \models [\varphi]\,\bot$.

Autoři knihy [Dit08] tedy označují takto nadefinované prohlášení jako *částečné* a opisují to slovy „*formule může být pravdivě prohlášena, jen pokud je skutečně pravdivá*“[6].

Zkoumáním sémantického významu jednotlivých formulí můžeme dále vypozorovat určité principy, podle nichž mezi sebou interagují operátor veřejného prohlášení s epistemickým operátorem a s logickými spojkami. Můžeme se například ptát, zda formule $[\varphi]\,K_a\psi$ a $K_a\,[\varphi]\,\psi$ jsou ekvivalentní. Podívejme se na následujícím příkladě, že nejsou.

[6] V originále „*truthful public announcements can only be made if they are indeed true*“. Viz [Dit08, str.77].



Ve světě s je splněna formule $[p]\, K_a q$ (protože v něm není splněno p), a přitom není splněna formule $K_a\, [p]\, q$ (protože v dosažitelném světě t je splněna formule $\neg\, [p]\, q$).

Zároveň si ale všimněme, že jsme v protipříkladu využili nesplněnosti požadavku na pravdivost prohlašované formule. A skutečně, podmíníme-li formuli $K_a\, [\varphi]\, \psi$ pravdivostí formule φ, protipříklad už se nám vytvořit nepodaří. Důkaz, že formule $[\varphi]\, K_a\psi$ a formule $\varphi \rightarrow K_a\, [\varphi]\, \psi$ jsou ekvivalentní, lze nalézt v [Dit08, str. 79].

Podobné ekvivalence lze najít i pro ostatní formule tvaru $[\psi]\, \varphi$, shrňme si je v následujícím tvrzení.

Tvrzení 3.3. *V libovolném modelu z třídy $\mathcal{S}5$ platí následující ekvivalence:*

$$
\begin{aligned}
[\varphi]\, p &\leftrightarrow (\varphi \rightarrow p)\\
[\varphi]\, (\psi \wedge \chi) &\leftrightarrow [\varphi]\, \psi \wedge [\varphi]\, \chi\\
[\varphi]\, (\psi \rightarrow \chi) &\leftrightarrow ([\varphi]\, \psi \rightarrow [\varphi]\, \chi)\\
[\varphi]\, \neg\psi &\leftrightarrow (\varphi \rightarrow \neg\, [\varphi]\, \psi)\\
[\varphi]\, K_a\psi &\leftrightarrow (\varphi \rightarrow K_a\, [\varphi]\, \psi)\\
[\varphi]\, [\psi]\, \chi &\leftrightarrow [\varphi \wedge [\varphi]\, \psi]\, \chi
\end{aligned}
$$

Platnost těchto ekvivalencí hraje důležitou roli v axiomatice a následně v důkazu úplnosti. Umožňuje totiž každou formuli v jazyce $\mathcal{L}_n^{PA}$ přepsat na ekvivalentní formuli v jazyce $\mathcal{L}_n$, tedy na formuli neobsahující operátor veřejného prohlášení. Díky tomu se také axiomy z následující definice nazývají *redukčními axiomy.*

3.1.2 Axiomatický systém

Definice 3.4 (Logika pravdivého veřejného prohlášení)**.** *Systém $\mathsf{S5}_n^{\mathsf{PA}}$ vznikne rozšířením systému $\mathsf{S5_n}$ o následující axiomy:*

$(\mathsf{PA1_{S5}})$ $[\varphi]\, p \leftrightarrow (\varphi \to p)$ *(atom po prohlášení)*

$(\mathsf{PA2_{S5}})$ $[\varphi]\, \neg\psi \leftrightarrow (\varphi \to \neg\, [\varphi]\, \psi)$ *(negace po prohlášení)*

$(\mathsf{PA3_{S5}})$ $[\varphi]\, (\psi \wedge \chi) \leftrightarrow [\varphi]\, \psi \wedge [\varphi]\, \chi$ *(konjunkce po prohlášení)*

$(\mathsf{PA4_{S5}})$ $[\varphi]\, K_a\psi \leftrightarrow (\varphi \to K_a\, [\varphi]\, \psi)$ *(znalost po prohlášení)*

$(\mathsf{PA5_{S5}})$ $[\varphi]\, [\psi]\, \chi \leftrightarrow [\varphi \wedge [\varphi]\, \psi]\, \chi$ *(kompozice prohlášení)*

Tento systém je korektní a úplný vůči příslušné třídě kripkovských struktur.

Věta 3.5. *Pro každou $\varphi \in \mathcal{L}_n^{PA}$*

$$\mathcal{S}5 \models \varphi \Leftrightarrow \mathsf{S5}_n^{\mathsf{PA}} \vdash \varphi.$$

Důkaz věty lze nalézt v [Dit08] a jak jsme již předeslali, uvádět ho zde nebudeme, protože je svou konstrukcí podobný důkazu, který se objeví v dalším textu. Poznamenejme jen, že důkaz plyne díky redukčním axiomům přímo z korektnosti a úplnosti systému $\mathsf{S5_n}$.

Situace se zkomplikuje, přidáme-li do jazyka obecnou znalost.

3.2 Pravdivé prohlášení s obecnou znalostí

Logika $\mathsf{S5}_n^{\mathsf{PA}}$ je zajímavá spíše z teoretického hlediska, právě díky výše zmíněné síle jejího jazyka. Teprve v souvislosti s obecnou znalostí ovšem vyniká to pravé kouzlo veřejného prohlášení. Každého snad „na první pohled“ napadne, že veřejně prohlášená formule se stává obecnou znalostí. Jak uvidíme v závěru této kapitoly, není tomu tak vždy, protože prohlášení některých epistemických tvrzení může mít vliv na pravdivost těchto tvrzení. Přinejmenším v případě faktických tvrzení je však zmíněný vztah mezi prohlášením a obecnou znalostí skutečně pravidlem.

3.2.1 Syntax a sémantika

Sémantiku a axiomatiku logiky $\mathsf{S5}_n^{\mathsf{PAC}}$ si nadefinujeme jako rozšíření logiky $\mathsf{S5}_n^{\mathsf{PA}}$ z předchozí podkapitoly. Definici jazyka si vzhledem k její induktivní formě uveďme kompletní, ale všechny operátory, které se v ní vyskytují, byly již dříve zavedeny.

Definice 3.6 (Jazyk s prohlášením a obecnou znalostí)**.** *Je dána konečná množina agentů A a spočetná množina atomů P. Jazyk $\mathcal{L}_n^{PAC}$ je definován induktivně následujícím předpisem:*

$$\varphi := p \mid \neg\varphi \mid (\varphi \wedge \varphi) \mid K_a\varphi \mid C_B\varphi \mid\, [\varphi]\, \varphi,$$

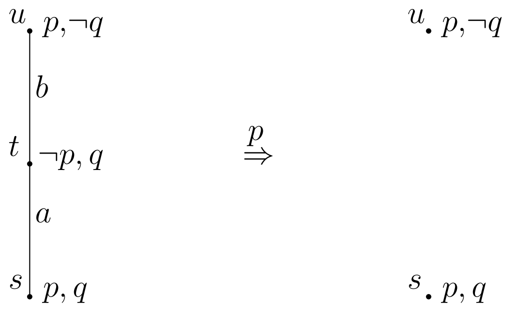
kde $a \in B, B \subseteq A$ *a* $p \in P$.

Sémantiku pro systém s obecným přesvědčením získáme z definice 3.2 přidáním podmínky pro splněnost formule $C_B\varphi$ tak, jak byla zavedena v předchozí kapitole, tedy pomocí tranzitivního uzávěru relace $\bigcup_{b\in B} \sim_b$, pro nějž jsme zavedli značení $\sim_B$.

$$M, s \models C_B\varphi \text{ právě tehdy, když } \forall t \in S \text{ takové, že } s \sim_B t \text{ platí } M, t \models \varphi$$

V [Dit08] je splněnost formule $C_B\varphi$ nadefinována pomocí *reflexivního* tranzitivního uzávěru, ale jak už jsme upozornili při zavádění operátoru C_B v epistemické logice, v případě, že je relace R_b reflexivní (což relace $\sim_b$ je), je už reflexivní i tranzitivní uzávěr relace $\bigcup_{b\in B} R_b$. Tato definice splněnosti formule $C_B\varphi$ je tedy s definicí uvedenou v [Dit08, str.74] ekvivalentní, a přitom ji ve stejném tvaru budeme moci použít i v následující kapitole, v níž relace dosažitelnosti reflexivní nebude.

V předchozí podkapitole jsme si v rámci sémantiky připravili platné formule, které nám pak posloužily v axiomatice jako redukční axiomy. V této podkapitole bychom navíc potřebovali redukční axiom pro obecnou znalost po prohlášení, ten se nám ale vytvořit nepodaří. Podívejme se na následujícím příkladě, že neplatí ekvivalence $[\varphi]\, C_B\psi \leftrightarrow (\varphi \rightarrow C_B\, [\varphi]\, \psi)$, která se nabízí jako zobecnění ekvivalence pro individuální znalost.



Snadno se ukáže, že ve světě s výchozího modelu je splněna formule $[p]\, C_Bq$ (protože v ořezaném modelu je ze světa s dosažitelný jen on sám a v něm platí q, tedy i C_Bq), ale není v něm splněna formule $p \rightarrow C_B[p]\, q$ (protože ve světě u dosažitelném z s není splněna formule $[p]\, q$, tedy ve světě s není splněno $C_B\, [p]\, q$, ačkoli je v něm splněno p). Snadno nahlédneme, že tato situace mohla nastat jen díky tomu, že svět u byl v původním modelu dosažitelný ze světa s, ale v ořezaném modelu už dosažitelný není, a nemá už tak vliv na pravdivost obecné znalosti ve světě s.

Z výsledků uvedených v článku *The logic of public announcements, common knowledge, and private suspicions* autorů A. Baltag, L. S. Moss a S. Solecki (v seznamu literatury uvedeném jako [Bal99]) plyne, že nelze nalézt ani žádnou jinou ekvivalenci, která by definovala formuli $[\varphi]C_B\psi$[7]. Lze ale nalézt korektní pravidlo, které umožní výslednou logiku axiomatizovat.

Tvrzení 3.7. *V libovolném modelu z třídy $\mathcal{S}5$ platí následující pravidlo:*

$$\textit{jestliže } \chi \to [\varphi]\,\psi \textit{ a } \chi \wedge \varphi \to E_B\chi, \textit{ pak } \chi \to [\varphi]\,C_B\psi.$$

Důkaz tohoto tvrzení je zároveň důkazem korektnosti odvozovacího pravidla systému $\mathsf{S5}_n^{\mathsf{PAC}}$, který nadefinujeme v následujícím pododdíle. V úvodu této kapitoly jsme deklarovali, že ponecháme všechna tvrzení bez důkazu, v tomto případě si však uveďme alespoň neformální důkaz, protože se nám bude hodit v další kapitole při motivaci analogického odvozovacího pravidla nově vytvořeného systému.

Vezměme si tedy libovolné M a s a předpokládejme $M, s \models \chi$. Chceme dokázat $M, s \models [\varphi]\,C_B\psi$, tedy za předpokladu $M, s \models \varphi$ chceme dokázat $M|_\varphi, s \models C_B\psi$. To znamená, že podél libovolné cesty z s v ořezaném modelu má platit ψ. Každá taková cesta musí být i cestou z s v původním modelu, a podél celé její délky musí platit φ, jinak by se do modelu $M|_\varphi$ nedostala. Díky druhému předpokladu dokazovaného pravidla se tedy pravdivost formule χ rozšíří po celé délce této cesty v modelu M. Z prvního předpokladu už tak přímo dostáváme pravdivost ψ podél celé cesty v modelu $M|_\varphi$.

3.2.2 Axiomatický systém

Axiomatiku systému $\mathsf{S5}_n^{\mathsf{PAC}}$ tedy získáme ze systému $\mathsf{S5}_n^{\mathsf{PA}}$ přidáním již zmíněného pravidla pro odvození obecné znalosti po prohlášení, dále pravidla přidání nutnosti pro operátor veřejného prohlášení, a axiomů a pravidel rozšiřujících systém $\mathsf{S5_n}$ na systém $\mathsf{S5_n^C}$. Tyto axiomy a pravidla pro obecnou znalost známe již z předchozí kapitoly, ale pro přehlednost si je vyjmenujme znovu.

Definice 3.8. *Systém $\mathsf{S5}_n^{\mathsf{PAC}}$ vznikne rozšířením systému $\mathsf{S5}_n^{\mathsf{PA}}$ o následující axiomy a odvozovací pravidla:*

[7] V této souvislosti zavádí van Benthem v článku [Ben06] operátor RC pro tzv. zobecněnou obecnou znalost, pro který už redukční axiom vyrobit lze.

(C1)	$C_B(\varphi \to \psi) \to (C_B\varphi \to C_B\psi)$	*(distribuce C)*
(C2)	$C_B\varphi \to (\varphi \wedge E_B C_B\varphi)$	*(C jako pevný bod)*
(C3)	$C_B(\varphi \to E_B\varphi) \to (\varphi \to C_B\varphi)$	*(indukce pro C)*
(NecC)	$\dfrac{\varphi}{C_B\varphi}$	*(přidání nutnosti C)*
(NecPA)	$\dfrac{\varphi}{[\psi]\,\varphi}$	*(přidání nutnosti $[\psi]$)*
($\mathsf{RPAC_{S5}}$)	$\dfrac{\chi \to [\varphi]\,\psi \qquad \chi \wedge \varphi \to E_B\chi}{\chi \to [\varphi]\,C_B\psi}$	*(C po prohlášení)*

K pravidlu přidání nutnosti $[\psi]$, které tu přibylo oproti systému $\mathsf{S5}_n^{\mathsf{PA}}$, ještě poznamenejme, že v systému bez obecné znalosti bylo možné se bez něj obejít, protože pro všechny formule tvaru $[\varphi]\,\psi$ jsme měli k dispozici redukční axiomy. V systému s obecnou znalostí už je ovšem potřeba.

Věta 3.9. *Pro každou $\varphi \in \mathcal{L}_n^{PAC}$ platí:*

$$\mathcal{S}5 \models \varphi \Leftrightarrow \mathsf{S5}_n^{\mathsf{PAC}} \vdash \varphi.$$

Pro důkaz úplnosti opět odkažme na jeho analogii s důkazem úplnosti systémů z následující kapitoly, případně ho lze nalézt v [Dit08, str.189].

3.3 Úspěšné formule

Podívejme se na závěr, jak je to s již zmíněným vztahem obecné znalosti a veřejného prohlášení. K tomu využijme tvrzení 3.7. Dosadíme-li v něm konstantu $\top$ za formuli χ, dále formuli φ za formuli ψ, a za B vezmeme celou množinu agentů A, dospějeme k následujícímu tvrzení.

Tvrzení 3.10. *Nechť φ je formule z jazyka $\mathcal{L}_n^{PAC}$. Pak pro třídu struktur $\mathcal{S}5$ platí:*

$$\textit{jestliže } \models [\varphi]\,\varphi, \textit{ pak} \models [\varphi]\,C_A\varphi.$$

Platí dokonce i opačná implikace, která už plyne triviálně z platnosti formule $C_B\psi \to \psi$, a můžeme tedy říci, že obecnou znalostí se prohlášením stávají právě takové formule, které prohlášením zachovávají svou pravdivost. V [Dit08] jsou takovéto formule, tedy formule splňující $\models [\varphi]\,\varphi$, nazývány *úspěšnými* formulemi.

Je zřejmé, že každá nemodální formule, tedy formule neobsahující žádné modální operátory, tento požadavek splňuje. Splněnost formule v nějakém světě se totiž může prohlášením změnit jen v případě, že na ni mají vliv i některé jiné dosažitelné světy, které se do ořezaného modelu nedostanou.

To v případě epistemických formulí zaručeno není, typickým příkladem jsou formule tvaru $p \wedge \neg K_a p$, tedy formule, které říkají, že p je pravdivé, ale agent a to neví. Pravdivým prohlášením této formule se agent a dozvídá p, tím přestává platit $\neg K_a p$, a tím i celá prohlašovaná formule.

Formule $p \wedge \neg K_a p$ tedy není úspěšnou formulí, a to přesto, že je úspěšný každý z konjunktů, které ji tvoří. Úspěšnost formulí tedy není uzavřena na konjunkci, a snadno se ukáže, že není uzavřena ani na negaci, implikaci a prohlášení. Z toho se dá vytušit, že syntakticky charakterizovat formule, pro něž platí $[\varphi]\,\varphi$, není zrovna snadné. V [Dit08] jsou v rámci této snahy uvedeny některé dílčí výsledky, a není nám známo, zda bylo v tomto směru dosaženo nějakého dalšího úspěchu, každopádně hlubší zkoumání tohoto problému už je nad rámec naší práce.

4 Přesvědčivé veřejné prohlášení

V této kapitole budeme zkoumat, jak by mělo vypadat veřejné prohlášení v systémech, v nichž neplatí axiom (T), konkrétně v systémech $\mathsf{K_n}$, $\mathsf{K4_n}$, $\mathsf{K45_n}$. Připomeňme, že v těchto systémech může být znalost nepravdivá, protože již neplatí formule $K_a\varphi \to \varphi$ a operátor K_a tak interpretujeme spíše jako „přesvědčení“, nežli jako „znalost“. Nyní si představme, že chceme modelovat komunikaci přímo uvnitř nějaké skupiny agentů, tedy že prohlášení přichází nikoli odněkud zvenčí, ale od jednoho z agentů dané skupiny. Pak je zřejmé, že jestliže agentovo přesvědčení nemusí být pravdivé, nemusí být pravdivé ani jeho prohlášení, ačkoli se jako pravdivé chová. To si vysvětleme lépe.

Agentovo přesvědčení sice může být nepravdivé, agent si však tuto skutečnost vůbec nepřipouští, neboli je přesvědčen, že je pravdivé. Tedy rozhodne-li se agent nějakou informaci, o níž je přesvědčen, sdělit ostatním agentům, činí tak v dobré víře, že jim předává skutečně pravdivou informaci, a se záměrem začlenit tuto novou informaci mezi jejich přesvědčení (které samozřejmě opět může být nepravdivé). Zkrátka prohlášení již nemusí být pravdivé, ale agent ho jako pravdivé podává, a ostatní agenti ho jako pravdivé přijímají. V souladu s touto interpretací budeme prohlášení v této kapitole nazývat *přesvědčivým* veřejným prohlášením.

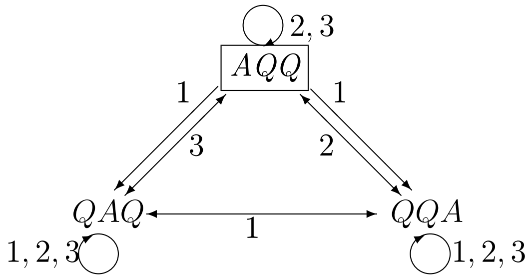
Podíváme-li se tedy na definici standardního pravdivého prohlášení z předešlé kapitoly, usoudíme, že požadavek na pravdivost φ ve světě, v němž formuli $[\varphi]\,\psi$ vyhodnocujeme, již není opodstatněný, a zároveň není důvod se úplně zbavovat $\neg\varphi$-světů, chceme pouze znemožnit agentům považovat tyto světy za možné. Navrhujeme tedy následující definici pro takto pojaté veřejné prohlášení:

$$M, s \models [\varphi]\psi \text{ právě tehdy, když } M|_{R\varphi}, s \models \psi,$$

kde $M|_{R\varphi}$ vznikne ořezáním nikoli celých světů, ale pouze relací vedoucích do $\neg\varphi$-světů. Možnost ořezávat relace namísto světů je v souvislosti s přechodem od znalosti k přesvědčení zmíněna přímo v [Dit08], tento přístup je zde ovšem jen naznačen a dále nerozveden. Ořezávání relací využívá rovněž David Steiner v [Ste09], který zkoumá tzv. skupinové prohlášení. K jeho práci se ještě dostaneme v páté kapitole. Než uvedeme formální definici přesvědčivého prohlášení, podívejme se na následující příklad.

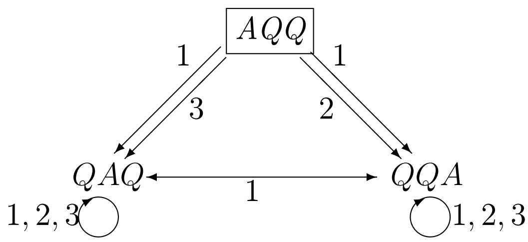
Příklad 1. *Představme si karetní hru pro tři hráče (budeme je značit 1, 2 a 3), při níž je každému z hráčů rozdána jedna karta z balíčku o jednom esu (A) a dvou královnách (Q). Pro hráče je výhodné dostat eso. Karty jsou rozdány tak, že každý z hráčů zná jen svoji kartu. Podívejme se na situaci, kdy hráč*

1 dostal eso, a hráči 2 a 3 dostali každý královnu, ale hráč 1 je z nějakého důvodu přesvědčen, že dostal královnu. (Třeba proto, že v předchozích kolech ještě ani jednou nedostal eso, a je vývojem hry tak otráven, že už vůbec nedoufá, a aniž by se na kartu vůbec podíval, rovnou předpokládá, že dostal opět královnu.) Tuto situaci můžeme znázornit následovně.



Tedy hráč 1 považuje při každém ze tří možných rozložení karet za možná právě ta, v nichž dostal královnu, zatímco ostatní dva hráči považují za možná vždy taková rozložení, v nichž dostali kartu, kterou skutečně drží v ruce.

Nyní se podívejme, jak se situace změní, když hráč 1 (nepravdivě, ale jsa o tom přesvědčen) prohlásí, že nemá eso (a ostatní, důvěřiví hráči tuto informaci přijmou jako pravdivou).



Nový model jsme tedy získali z původního vynecháním všech orientovaných hran vedoucích do světa AQQ, v němž jako v jediném není pravdivá prohlašovaná formule.

V tuto chvíli už tedy žádný z hráčů nepovažuje stav AQQ za možný, a mezi hráči 1, 2 a 3 tak panuje (mylné) obecné přesvědčení, že eso drží jeden z hráčů 2, 3. Konkrétně každý z hráčů 2, 3 je přesvědčen, že eso má ten druhý z nich.

Z příkladu je vidět, že se nám skutečně hodí ořezávat jen relace, protože kdybychom ořezávali celé světy, zbavili bychom se v posledním kroku aktuálního světa. V předchozí kapitole tento problém nenastával, protože prohlášení bylo vždy pravdivé, a aktuální svět tak zůstával zachován.

Ve zbytku této kapitoly budeme postupně definovat syntax, sémantiku a axiomatiku našich nových systémů. V jednotlivých podkapitolách rozlišíme systémy v jazyce bez obecného přesvědčení (značme je souhrnně $\mathsf{X}_n^{\mathsf{PA}}$) a systémy v jazyce obsahujícím obecné přesvědčení (značme je souhrnně $\mathsf{X}_n^{\mathsf{PAC}}$).

Změna sémantiky si samozřejmě vyžádá i změnu axiomatického systému. Sémantiku ovšem měníme jen pro dynamický operátor, tedy axiomatiku systémů $\mathsf{K_n}$, $\mathsf{K4_n}$, $\mathsf{K45_n}$ můžeme převzít, a změníme jen jejich dynamické rozšíření. Pro systémy $\mathsf{X}_n^{\mathsf{PA}}$ to znamená pouze nalézt nové redukční axiomy, a uvidíme, že bude oproti systému $\mathsf{S5}_n^{\mathsf{PA}}$ s pravdivým prohlášením stačit jen malá úprava, ale v systémech $\mathsf{X}_n^{\mathsf{PAC}}$ se budeme muset vypořádat s pravidlem pro odvození obecného přesvědčení po prohlášení, a to si vyžádá trochu větší změny.

Jak jsme již předeslali v úvodu této práce, počínaje touto kapitolou předkládáme vlastní úvahy a výsledky. Začněme tedy systémy v jazyce bez obecného přesvědčení.

4.1 Přesvědčivé prohlášení bez obecné znalosti

4.1.1 Syntax a sémantika

Definici jazyka můžeme převzít z předchozí kapitoly, poznamenejme jen, že v systémech bez axiomu (T) se epistemický operátor nutnosti často místo K_a značí B_a (podle anglického „belief“), my však zůstaneme u značení K_a, aby nedocházelo ke zbytečnému matení. V celé této kapitole tedy operátor K_a interpretujeme jako „přesvědčení“.

Definice 4.1. *Je dána konečná množina agentů A a spočetná množina atomů P. Jazyk $\mathcal{L}_n^{PA}$ je definován induktivně následujícím předpisem:*

$$\varphi := p \,|\, \neg\varphi \,|\, (\varphi \wedge \varphi) \,|\, K_a\varphi \,|\, [\varphi]\,\varphi,$$

kde $a \in B$ a $p \in P$. Formuli $K_a\varphi$ čteme „agent a je přesvědčen o φ“.

Změna sémantiky formule $[\varphi]\,\psi$ byla motivována v úvodu této kapitoly, splněnost „nedynamických“ formulí je definována standardně. Relaci dosažitelnosti budeme ve zbytku této práce značit, obecněji než v předchozí kapitole, $\rightarrow_a$ (pro $a \in A$).

Definice 4.2. *Je dán kripkovský model $M = (S, \rightarrow_a, V)$ pro množinu agentů A a množinu atomů P. Pravdivost formule ve světě s modelu M definujeme* *následovně:*

$$\begin{array}{rll} M, s \models p & \textit{právě tehdy, když} & s \in V_p \\ M, s \models \neg\varphi & \textit{právě tehdy, když} & M, s \not\models \varphi \\ M, s \models \varphi \wedge \psi & \textit{právě tehdy, když} & M, s \models \varphi \textit{ a } M, s \models \psi \\ M, s \models K_a\varphi & \textit{právě tehdy, když} & \forall t \in S \textit{ takové, že } s \rightarrow_a t \textit{ platí } M, t \models \varphi \\ M, s \models [\varphi]\psi & \textit{právě tehdy, když} & M|_{R\varphi}, s \models \psi, \end{array}$$

kde $M|_{R\varphi} = (S', \rightarrow', V')$ *je definováno následovně:*

$$\begin{array}{rcl} S' & = & S \\ \rightarrow'_a & = & \rightarrow_a \cap \{(s,t); M, t \models \varphi\} \\ V'_p & = & V_p \end{array}$$

V definici záměrně nezmiňujeme duální operátor $\langle\varphi\rangle$, a to proto, že při takto nastavené sémantice už nemá význam. Ukažme si, že je ekvivalentní operátoru $[\varphi]$, tedy že pro libovolné formule φ, ψ, libovolný model M z třídy všech kripkovských struktur a libovolný jeho svět platí $M, s \models \neg\,[\varphi]\,\neg\psi \leftrightarrow [\varphi]\,\psi$:

$$\begin{array}{rcl} M, s \models \neg[\varphi]\neg\psi & \Leftrightarrow & M, s \not\models [\varphi]\neg\psi \\ & \Leftrightarrow & M|_{R\varphi}, s \not\models \neg\psi \\ & \Leftrightarrow & M|_{R\varphi}, s \models \psi \quad \Leftrightarrow \quad M, s \models [\varphi]\psi \end{array}$$

Na rozdíl od předchozí kapitoly už tedy máme pouze jedno prohlášení, které může být pravdivé nebo nepravdivé.

4.1.2 Axiomatický systém

Ukažme si třeba na příkladě formule tvaru $[\varphi]\,\neg\psi$, že nemůžeme beze změny převzít redukční axiomy z předchozí kapitoly. Stačí vzít libovolný svět s, v němž formule φ není splněna a je v něm splněn nějaký atom p. V takovém světě je implikace $\varphi \rightarrow \neg\,[\varphi]\,p$ splněna triviálně, ale formule $[\varphi]\,\neg p$ v něm splněna není. Ekvivalence $[\varphi]\,\neg p \leftrightarrow (\varphi \rightarrow \neg\,[\varphi]\,p)$ tedy není ve světě s splněna a redukční axiom ($\mathsf{PA2}_{\mathsf{S5}}$) tak nebude v našich systémech korektní.

Rozdíl oproti systému $\mathsf{S5}_n^{\mathsf{PA}}$, kde tento axiom korektní je, je dán opuštěním požadavku na pravdivost prohlašované formule v naší nové sémantice veřejného prohlášení. Snadno nahlédneme, že tedy stačí v implikaci $\varphi \rightarrow \neg\,[\varphi]\,\psi$ vypustit předpoklad φ a redukční axiom už korektní bude. Stejně tak u redukčních axiomů pro atom a pro znalost bude potřeba vypustit předpoklad φ, redukční axiomy pro konjunkci a pro kompozici prohlášení můžeme převzít. Redukční axiomy pro systémy $\mathsf{K}_n^{\mathsf{PA}}$, $\mathsf{K4}_n^{\mathsf{PA}}$, $\mathsf{K45}_n^{\mathsf{PA}}$ budou shrnuty v následující definici.

Definice 4.3. *Systémy* $\mathsf{K}_n^{\mathsf{PA}}$, $\mathsf{K4}_n^{\mathsf{PA}}$, $\mathsf{K45}_n^{\mathsf{PA}}$ *vzniknou ze systémů* $\mathsf{K_n}$, $\mathsf{K4_n}$, $\mathsf{K45_n}$ *přidáním následujících axiomů:*

$(\mathsf{PA1_K})$	$[\varphi]\, p \leftrightarrow p$	*(atom po prohlášení)*
$(\mathsf{PA2_K})$	$[\varphi]\, \neg\psi \leftrightarrow \neg\, [\varphi]\, \psi$	*(negace po prohlášení)*
$(\mathsf{PA3_K})$	$[\varphi]\, (\psi \wedge \chi) \leftrightarrow [\varphi]\, \psi \wedge [\varphi]\, \chi$	*(konjunkce po prohlášení)*
$(\mathsf{PA4_K})$	$[\varphi]\, K_a\psi \leftrightarrow K_a(\varphi \rightarrow [\varphi]\, \psi)$	*(přesvědčení po prohlášení)*
$(\mathsf{PA5_K})$	$[\varphi]\, [\psi]\, \chi \leftrightarrow [\varphi \wedge [\varphi]\, \psi]\, \chi$	*(kompozice prohlášení)*

K axiomu $(\mathsf{PA4_K})$ jen poznamenejme, že skutečně vznikl z redukčního axiomu $(\mathsf{PA4_{S5}})$ pouze vypuštěním φ v předpokladu implikace, ačkoli to tak na první pohled nevypadá. Odpovídající redukční axiom v systému $\mathsf{S5^{PA}}$ totiž je sice $[\varphi]\, K_a\psi \leftrightarrow (\varphi \rightarrow K_a\, [\varphi]\, \psi)$, ale protože v $\mathsf{S5^{PA}}$ je formule $[\varphi]\, \psi$ ekvivalentní s $\varphi \rightarrow [\varphi]\, \psi$, mohli bychom axiom $(\mathsf{PA4_{S5}})$ ekvivalentně psát jako $[\varphi]\, K_a\psi \leftrightarrow (\varphi \rightarrow K_a(\varphi \rightarrow [\varphi]\, \psi))$, a z tohoto tvaru už dostaneme $(\mathsf{PA4_K})$ opravdu jen vypuštěním φ.

Korektnost systémů z předchozí definice si ukážeme v následující větě.

Věta 4.4. *Pro každou formuli* $\varphi \in \mathcal{L}_n^{PA}$ *platí:*

$$\begin{aligned} \mathsf{K}_n^{\mathsf{PA}} \vdash \varphi \quad &\Rightarrow \quad \mathcal{K} \models \varphi \\ \mathsf{K4}_n^{\mathsf{PA}} \vdash \varphi \quad &\Rightarrow \quad \mathcal{K}4 \models \varphi \\ \mathsf{K45}_n^{\mathsf{PA}} \vdash \varphi \quad &\Rightarrow \quad \mathcal{K}45 \models \varphi \end{aligned}$$

Důkaz: Indukcí podle délky důkazu. V prvním kroku si ukažme korektnost redukčních axiomů pro přesvědčení po prohlášení a kompozici prohlášení, ostatní redukční axiomy se ukáží podobně.

- $[\varphi]\, K_a\psi \leftrightarrow K_a(\varphi \rightarrow [\varphi]\, \psi)$

  Vezměme si libovolné M, s a ukažme, že v M, s platí daná ekvivalence. Rozepišme tedy podle sémantické definice $\models$ postupně levou a pravou stranu a uvidíme, že jsou ekvivalentní. Symbol $\Leftrightarrow$ budeme používat jako zkratku za „právě tehdy, když“, a symbol $\Rightarrow$ jako zkratku za „implikuje“ a symbol & za „a zároveň“. Zápisem $\forall t\ s \rightarrow_a t$ rozumíme „pro každé t takové, že $s \rightarrow_a t$ platí“.

$$\begin{aligned} M, s \models [\varphi]\, K_a\psi \quad &\Leftrightarrow \quad M|_{R\varphi}, s \models K_a\psi \\ &\Leftrightarrow \quad \forall t\ s \rightarrow'_a t\ M|_{R\varphi}, t \models \psi \\ &\Leftrightarrow \quad \forall t\ (s \rightarrow_a t\ \&\ M, t \models \varphi)\ M|_{R\varphi}, t \models \psi \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} M, s \models K_a(\varphi \to [\varphi]\,\psi) &\Leftrightarrow \forall t\ s \to_a t\ (M, t \models \varphi \to [\varphi]\,\psi) \\ &\Leftrightarrow \forall t\ s \to_a t\ (M, t \models \varphi \Rightarrow M, t \models [\varphi]\,\psi) \\ &\Leftrightarrow \forall t\ s \to_a t\ (M, t \models \varphi \Rightarrow M|_{R\varphi}, t \models \psi) \end{aligned}$$

- $[\varphi]\,[\psi]\,\chi \leftrightarrow [\varphi \wedge [\varphi]\,\psi]\,\chi$

  Opět si nejprve rozepíšeme podle definice $\models$ levou a pravou stranu axiomu.

$$\begin{aligned} M, s \models [\varphi]\,[\psi]\,\chi &\Leftrightarrow M|_{R\varphi}, s \models [\psi]\,\chi \\ &\Leftrightarrow M|_{R\varphi}|_{R\psi}, s \models \chi \end{aligned}$$

$$M, s \models [\varphi \wedge [\varphi]\,\psi]\,\chi \ \Leftrightarrow\ M|_{R(\varphi \wedge [\varphi]\psi)}, s \models \chi$$

  Nyní je potřeba ukázat, že modely $M|_{R\varphi}|_{R\psi}$ a $M|_{R(\varphi\wedge[\varphi]\psi)}$ jsou ekvivalentní, tedy že v nich zůstávají v relaci stejné dvojice světů.

  – $r \to_a t$ je v modelu $M|_{R\varphi}|_{R\psi}$ právě tehdy, když $r \to_a t$ je v modelu $M|_{R\varphi}$ a $M|_{R\varphi}, t \models \psi$, a to je právě tehdy, když $r \to_a t$ je v modelu M a $M, t \models \varphi$ a $M, t \models [\varphi]\,\psi$.

  – $r \to_a t$ je v modelu $M|_{R(\varphi\wedge[\varphi]\psi)}$ právě tehdy, když $r \to_a t$ je v modelu M a $M, t \models \varphi \wedge [\varphi]\,\psi$.

V indukčním kroku už není co dokazovat, protože žádné pravidlo jsme do nových systémů nepřidávali. Korektnost systémů $\mathsf{X}_n^{\mathsf{PA}}$ už tak plyne z korektnosti systémů X_n. □

O systémech $\mathsf{K}_n^{\mathsf{PA}}$, $\mathsf{K4}_n^{\mathsf{PA}}$, $\mathsf{K45}_n^{\mathsf{PA}}$ tvrdíme, že jsou rovněž úplné. Důkaz úplnosti si ale uveďme až současně s důkazem úplnosti systémů s obecným přesvědčením, pro který si vzhledem k jeho obtížnosti vyhrazujeme zvláštní kapitolu. A tak i větu o úplnosti si vyslovme až spolu s jejím důkazem, tedy v kapitole 6.

4.2 Přesvědčivé prohlášení s obecnou znalostí

Sémantiku a axiomatiku systémů $\mathsf{X}_n^{\mathsf{PAC}}$ budeme opět definovat jako rozšíření systémů $\mathsf{X}_n^{\mathsf{PA}}$ z předchozí podkapitoly o obecné přesvědčení. Definici jazyka opět můžeme převzít z předchozí kapitoly, jen místo „obecné znalosti“ teď budeme říkat „obecné přesvědčení“.

4.2.1 Syntax a sémantika

Definice 4.5. *Je dána konečná množina agentů A a spočetná množina atomů P. Jazyk $\mathcal{L}_n^{PAC}$ je definován induktivně následujícím předpisem:*

$$\varphi := p \,|\, \neg\varphi \,|\, (\varphi \wedge \varphi) \,|\, K_a\varphi \,|\, C_B\varphi \,|\, [\varphi]\,\varphi,$$

kde $a \in B, B \subseteq A$ a $p \in P$.

Formuli $C_B\varphi$ čteme „φ je obecným přesvědčením ve skupině agentů B“.

Sémantiku pro systémy s obecným přesvědčením získáme z definice 4.2 přidáním následující podmínky:

$M, s \models C_B\varphi$ právě tehdy, když $\forall t \in S$ takové, že $s \rightarrow_B t$ platí $M, t \models \varphi$.

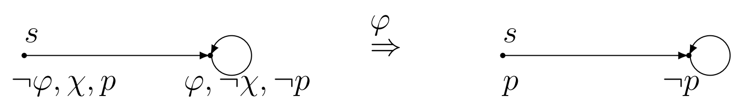
Připomeňme ještě jednou, že relace $\rightarrow_B$ označuje tranzitivní uzávěr relace $\bigcup_{b \in B} \rightarrow_b$, a tentokrát je to skutečně nereflexivní uzávěr, tedy pro pravdivost formule $C_B\varphi$ nepožadujeme pravdivost formule φ v samotném světě s. To je v souladu s naší interpretací veřejného prohlášení, kdy agent může prohlásit i nepravdivé tvrzení, a to se tak může rozšířit v mylné obecné přesvědčení.

4.2.2 Axiomatický systém

Jak už jsme naznačili v úvodu této kapitoly, při vytváření axiomatických systémů $\mathsf{X}_n^{\mathsf{PAC}}$ se budeme muset vypořádat s pravidlem pro odvození obecného přesvědčení po prohlášení. Připomeňme si nejprve, jak vypadá odpovídající pravidlo v systému $\mathsf{S5}^{\mathsf{PA}}$ s pravdivým veřejným prohlášením:

$$(\mathsf{RPAC}_{\mathsf{S5}}) \qquad \frac{\chi \rightarrow [\varphi]\,\psi \qquad \chi \wedge \varphi \rightarrow E_B\chi}{\chi \rightarrow [\varphi]\,C_B\psi}$$

Na následujícím protipříkladě si ukažme, proč nejde pravidlo převzít pro systémy $\mathsf{K}_n^{\mathsf{PAC}}$, $\mathsf{K4}_n^{\mathsf{PAC}}$, $\mathsf{K45}_n^{\mathsf{PAC}}$ a sémantiku přesvědčivého prohlášení:



Snadno se ukáže, že ve světě s výchozího modelu jsou podle naší nové sémantiky splněny oba předpoklady pravidla ($\mathsf{RPAC}_{\mathsf{S5}}$), kde za ψ vezmeme p, ale není splněn závěr. Pravidlo tedy není vůči této sémantice korektní. Podívejme se podrobně, v čem toto pravidlo selhává a jak je potřeba ho opravit.

Vzpomeňme si z neformálního důkazu korektnosti pravidla ($\mathsf{RPAC}_{\mathsf{S5}}$) uvedeného v předešlé kapitole, že druhý předpoklad má zajistit šíření formule χ

podél φ-cesty z s. Díky tomu a díky prvnímu předpokladu je pak v modelu ořezaném podle φ pravdivá formule ψ podél dané cesty, a dospěje se tak k obecnému přesvědčení ψ v s. V našem příkladě se ale χ ze světa s do dalšího světa nepřenáší, protože ve světě s neplatí zároveň φ. A to tam skutečně platit nemusí, protože v nové definici prohlášení už nemáme požadavek na pravdivost prohlašované formule. Vypustíme-li z předpokladu $\chi \wedge \varphi \to E_B\chi$ formuli φ, formule χ se sice už šířit bude, ale i do světů, v kterých ji nepotřebujeme. Předpoklad tak bude moc silný a pravidlo nebude stačit k dokázání úplnosti. Podmiňme tedy šíření formule χ formulí φ následovně:

$$\chi \to E_B(\varphi \to \chi).$$

Všimněme si ale, že s pravidlem ($\mathsf{RPAC}_{\mathsf{S5}}$) je ještě další problém, totiž že formuli $[\varphi]\, C_B\psi$ se nám podaří odvodit jen pro taková ψ, pro která odvodíme rovněž $[\varphi]\, \psi$. To je v pořádku v systému $\mathsf{S5}^{\mathsf{PA}}$, protože v něm je dokazatelná formule $C_B\psi \to \psi$, ale v systémech bez axiomu (T) tomu tak není. Opět tedy pravidlo nebude úplné, protože se nám nepodaří odvodit žádné *mylné* obecné přesvědčení. Například formule $[\bot]\, C_B\bot$ je pravdivá ve všech modelech, protože prohlášením formule $\bot$ ve světě s ořežeme veškeré hrany v modelu, tedy žádný svět nebude ze světa s dosažitelný, a $C_B\bot$ v něm bude pravdivá triviálně. Rádi bychom tedy uměli odvodit formuli $\chi \to [\bot]\, C_B\bot$ pro libovolnou χ, ale pomocí pravidla ($\mathsf{RPAC}_{\mathsf{S5}}$) se nám to nepodaří. Navrhujeme tedy změnit první předpoklad pravidla na

$$\chi \to E_B(\varphi \to [\varphi]\, \psi),$$

čímž vynutíme pravdivost formule ψ v ořezaném modelu počínaje až prvním dosažitelným světem, nikoli hned tím výchozím.

Není-li tato motivace nového pravidla přesvědčivá, příslušné důkazy korektnosti a úplnosti snad budou dostatečnou obhajobou.

Všimněme si ještě, že předpoklady pravidla teď vypadají podobně, a mohli bychom je spojit do jednoho. V dalším textu se nám ale bude lépe zacházet se dvěma oddělenými předpoklady, dovolme si tedy je tak ponechat. Nové pravidlo budeme značit ($\mathsf{RPAC}_{\mathsf{K}}$) a bude tedy vypadat následovně:

$$\frac{\chi \to E_B(\varphi \to [\varphi]\, \psi) \qquad \chi \to E_B(\varphi \to \chi)}{\chi \to [\varphi]\, C_B\psi}.$$

Ostatní axiomy a pravidla systémů $\mathsf{X}_n^{\mathsf{PAC}}$ známe už z druhé kapitoly, a následující definice tak snad nevyžaduje další komentář.

Definice 4.6. *Axiomatické systémy $\mathsf{K}_n^{\mathsf{PAC}}$, resp. $\mathsf{K4}_n^{\mathsf{PAC}}$, resp. $\mathsf{K45}_n^{\mathsf{PAC}}$ vzniknou ze systémů $\mathsf{K}_n^{\mathsf{PA}}$, resp. $\mathsf{K4}_n^{\mathsf{PA}}$, resp. $\mathsf{K45}_n^{\mathsf{PA}}$ přidáním následujícího axiomu* *a odvozovacích pravidel:*

(C) $C_B\varphi \rightarrow E_B(\varphi \wedge C_B\varphi)$ *(C jako pevný bod)*

(RC) $\dfrac{\varphi \rightarrow E_B(\psi \wedge \varphi)}{\varphi \rightarrow C_B\psi}$ *(indukce pro C)*

(NecPA) $\dfrac{\varphi}{[\psi]\,\varphi}$ *(přidání nutnosti $[\psi]$)*

($\mathsf{RPAC_K}$) $\dfrac{\chi \rightarrow E_B(\varphi \rightarrow [\varphi]\,\psi) \quad \chi \rightarrow E_B(\varphi \rightarrow \chi)}{\chi \rightarrow [\varphi]\,C_B\psi}$ *(C po prohlášení)*

Vzhledem k dokázané korektnosti systémů $\mathsf{K}_n^{\mathsf{PA}}$, $\mathsf{K4}_n^{\mathsf{PA}}$, $\mathsf{K45}_n^{\mathsf{PA}}$ a $\mathsf{K}_\mathsf{n}^\mathsf{C}$, $\mathsf{K4}_\mathsf{n}^\mathsf{C}$, $\mathsf{K45}_\mathsf{n}^\mathsf{C}$ stačí dokázat korektnost pravidla přidání nutnosti veřejného prohlášení a nového pravidla pro obecné přesvědčení pro prohlášení.

Věta 4.7. *Pro každou formuli $\varphi \in \mathcal{L}_n^{PAC}$ platí*

$$\begin{aligned} \mathsf{K}_n^{\mathsf{PAC}} \vdash \varphi &\;\Rightarrow\; \mathcal{K} \models \varphi \\ \mathsf{K4}_n^{\mathsf{PAC}} \vdash \varphi &\;\Rightarrow\; \mathcal{K}4 \models \varphi \\ \mathsf{K45}_n^{\mathsf{PAC}} \vdash \varphi &\;\Rightarrow\; \mathcal{K}45 \models \varphi \end{aligned}$$

Důkaz: Dokázat korektnost odvozovacího pravidla nějaké teorie znamená dokázat, že platí-li předpoklad pravidla ve všech modelech dané teorie, platí ve všech modelech i jeho závěr. V případě pravidla (NecPA) tedy máme dokázat, že za předpokladu $M \models \varphi$ pro každé $M \in \mathcal{K}_n$, resp. $\in \mathcal{K}4_n$, resp. $\in \mathcal{K}45_n$, platí také $M \models [\psi]\,\varphi$, pro každé takové M. Tedy máme dokázat, že pro každé M platí $M|_{R\psi} \models \varphi$. To ovšem vzhledem k předpokladu pravidla znamená jen ověřit, že model $M|_{R\varphi}$ je modelem příslušné teorie. Že je model $M|_{R\varphi}$ kripkovským modelem, je snad zřejmé, tedy pro systém $\mathsf{K}_n^{\mathsf{PAC}}$ není co dokazovat. V případě systémů $\mathsf{K4}_n^{\mathsf{PAC}}$ a $\mathsf{K45}_n^{\mathsf{PAC}}$ je ovšem potřeba ukázat, že přeměnou modelu M na model $M|_{R\varphi}$ nedochází k porušení tranzitivity a euklidovskosti kripkovského modelu. Ukažme si, že je-li původní model M tranzitivní, pak je tranzitivní i ořezaný model $M|_{R\varphi}$.

Jestliže $s \rightarrow_a t$ a $t \rightarrow_a u$ v modelu $M|_{R\varphi}$, pak i $s \rightarrow_a t$ a $t \rightarrow_a u$ v modelu M, o němž předpokládáme, že tranzitivní je, tedy máme rovněž $s \rightarrow_a u$ v modelu M. Protože $t \rightarrow_a u$ v modelu $M|_{R\varphi}$, musí platit $M, u \models \varphi$, tedy z $s \rightarrow_a u$ v modelu M plyne $s \rightarrow_a u$ i v modelu $M|_{R\varphi}$.

Euklidovskost se ukáže podobně.

Zbývá dokázat korektnost pravidla ($\mathsf{RPAC_K}$). Chceme tedy ukázat, že pokud $\models \chi \rightarrow E_B(\varphi \rightarrow [\varphi]\psi)$ a $\models \chi \rightarrow E_B(\varphi \rightarrow \chi)$, pak $\models \chi \rightarrow [\varphi]C_B\psi$.

Vezměme libovolné M a s a předpokládejme, že $M, s \models \chi$. Chceme dokázat, že $M, s \models [\varphi]C_B\psi$, což je podle definice $\models$ právě tehdy, když

$M|_{R\varphi}, s \models C_B\psi$. Vezmeme si tedy libovolné t z modelu $M|_{R\varphi}$ takové, že $s \to_B t$, a chceme dokázat, že $M|_{R\varphi}, t \models \psi$. Budeme dokazovat indukcí podle délky cesty z s do t v modelu $M|_{R\varphi}$.

1. Jestliže je délka cesty 1, tedy $s \to_a t$ pro nějaké $a \in B$, pak z prvního předpokladu plyne $M, t \models \varphi \to [\varphi]\,\psi$. Protože t je z domény modelu $M|_{R\varphi}$, platí $M, t \models \varphi$ a tedy i $M, t \models [\varphi]\,\psi$. T je podle definice $\models$ právě tehdy, když $M|_{R\varphi}, t \models \psi$.

2. Předpokládejme nyní, že délka cesty je $n+1$, tedy máme $s \to_a u \to_B t$ pro nějaké $a \in B$ a $u \in M|_{R\varphi}$. Z předpokladu $M, s \models \chi$ a z $s \to_a u$ plyne $M, u \models \varphi \to \chi$, a protože $u \in M|_{R\varphi}$, máme rovněž $M, u \models \chi$. Podle indukčního předpokladu pro cestu délky n takovou, že $u \to_B t$ platí $M|_{R\varphi}, t \models \psi$. $\square$

O systémech $\mathsf{K}_n^{\mathsf{PAC}}$, $\mathsf{K4}_n^{\mathsf{PAC}}$, $\mathsf{K45}_n^{\mathsf{PAC}}$ tvrdíme, že jsou rovněž úplné. Vyslovení věty si ale opět ponechejme do kapitoly 6, která je vyhrazena důkazům úplnosti.

4.3 Úspěšné formule

Na závěr se podívejme, jak je to se vztahem veřejného prohlášení a obecného přesvědčení. V minulé kapitole jsme viděli, že formule φ se prohlášením stává obecnou znalostí, jestliže je úspěšná, totiž platí $[\varphi]\,\varphi$. V první řadě si všimněme, že pokud bychom měli přijmout definici úspěšné formule z předchozí kapitoly, nemohli bychom úspěšnými prohlásit ani nemodální formule, od kterých se to rozhodně očekává. Stačí si představit model o jednom světě, v němž není pravdivá formule φ, a snadno nahlédneme, že v tomto světě není splněna ani formule $[\varphi]\,\varphi$, pro žádnou nemodální φ.

Zároveň si ale uvědomme, že v $\mathsf{S5}_n^{\mathsf{PAC}}$ je formule $[\varphi]\,\varphi$ ekvivalentní s formulí $\varphi \to [\varphi]\,\varphi$, a domníváme se, že to je to, co se ve skutečnosti požaduje po úspěšné formuli. Nechceme nazvat úspěšnou takovou formuli, která se prohlášením stává pravdivou, ale takovou, která pokud je pravdivá, zůstává pravdivou i po prohlášení. Navrhujeme tedy definici v tomto smyslu poupravit, a prohlásit formuli φ za úspěšnou v případě, že platí $\varphi \to [\varphi]\,\varphi$.

Pak můžeme dospět k obdobnému tvrzení, jako v předchozí kapitole, totiž že každá úspěšná formule se po prohlášení stává obecným přesvědčením.

Tvrzení 4.8. *Nechť φ je libovolná formule v jazyce $\mathcal{L}_n^{PAC}$. Pak každou z tříd struktur $\mathcal{K}$, $\mathcal{K}4$, $\mathcal{K}45$ platí:*

$$\textit{jestliže } \models \varphi \to [\varphi]\,\varphi, \textit{ pak } \models [\varphi]\,C_A\varphi.$$

Důkaz: Jestliže v celém modelu platí $\varphi \to [\varphi]\,\varphi$, platí tato formule i v každém světě dosažitelném z libovolného světa daného modelu, tedy v celém modelu platí také $E_A(\varphi \to [\varphi]\,\varphi)$. Tím dostáváme předpoklad pravidla

($\mathsf{RPAC_K}$), jestliže v něm za χ dosadíme $\top$, za ψ dosadíme φ a za B vezmeme celou A. Druhý předpoklad pravidla ($\mathsf{RPAC_K}$) je tímto dosazením automaticky splněn a z korektnosti pravidla tak rovnou dostáváme $[\varphi]\, C_A\varphi$. $\square$

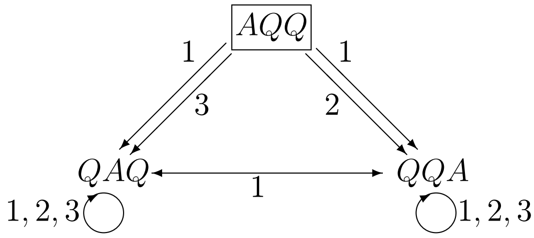
5 Prohlášení pro bezesporné přesvědčení

V předchozích kapitolách jsme zkoumali veřejné prohlášení v systémech $\mathsf{S5}_n$ a K_n, $\mathsf{K4}_n$, $\mathsf{K45}_n$. Vzpomeňme si ale, že v první kapitole jsme definovali ještě systémy s axiomem (D), konkrétně KD_n, $\mathsf{KD4}_n$, $\mathsf{KD45}_n$.

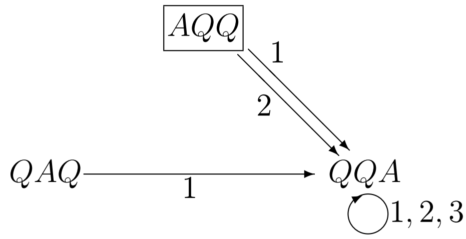
5.1 Problém zachování bezespornosti přesvědčení

Vraťme se k příkladu 1 z předchozí kapitoly a ukažme si na něm, že sémantiku veřejného prohlášení z předchozí kapitoly nelze převzít pro systémy s axiomem (D).

Příklad 2. *Přeskočme rovnou do situace po prohlášení hráče 1, že nemá eso, tedy do této*



a podívejme se, co nastane, když teď třeba hráč 2 (tentokrát už pravdivě) prohlásí, že ani on nemá eso:



Vidíme, že z aktuálního světa nevede pro hráče 3 žádná hrana, a agent je v tomto světě sporný.

Tedy ačkoli byl v původním modelu axiom (D) splněn, v tom ořezaném už není.

Snadno nahlédneme, že kdykoli agent přijímá prohlášení formule, o jejíž negaci je přesvědčen, dostává se do sporu. Neboli, jestliže agent považuje ve světě s za možné jen samé $\neg\varphi$ světy, prohlášením formule φ se ořežou všechny světy, které považuje za možné, a ve světě s ořezaného modelu je tak přesvědčen o libovolné formuli.

V terminologii modelů můžeme tento problém vyjádřit tak, že ořezávání relací při vyhodnocování formule $[\varphi]\,\psi$ podle definice 4.2 nezachovává serialitu. To znamená, že ačkoli model M je seriální, model $M|_{R\varphi}$ už seriální být nemusí. Navažme v tuto chvíli na poslední oddíl kapitoly o epistemické logice, v němž jsme zkoumali modely jednoagentních systémů, a podívejme se, jak bychom problém se zachováním seriality řešili v $\mathsf{KD45}$ (tedy v $\mathsf{KD45}_1$). Snadno nahlédneme, že aby zůstal $\mathsf{KD45}$ model seriálním i po ořezání relací, stačilo by, aby z každého jeho světa vedla alespoň jedna hrana do světa, v němž je pravdivá prohlašovaná formule. Tato hrana by pak při zavedené definici ořezávání byla v každém případě přenesena i do ořezaného modelu, a požadavek na serialitu by byl splněn. Existenci alespoň jedné hrany vedoucí ze světa s do φ-světa zajistí splněnost formule $\hat{K}\varphi$ ve světě s. Vzpomeňme si ještě na pravdivé veřejné prohlášení v systému $\mathsf{S5}$, kde byla proveditelnost prohlášení podmíněna pravdivostí prohlašované formule. Co kdybychom tedy podobně přidali do definice prohlášení podmínku na pravdivost formule $\hat{K}\varphi$?

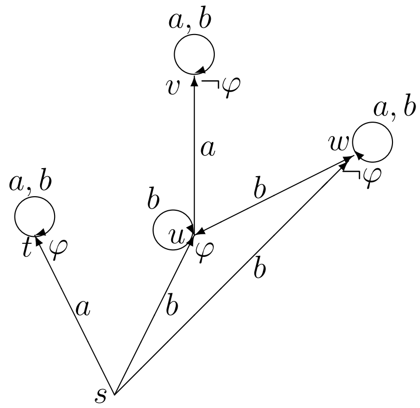
$$M, s \models [\varphi]\,\psi \text{ právě tehdy, když } M, s \models \hat{K}\varphi \text{ implikuje } M|_{R\varphi} \models \psi$$

Je snad vidět na první pohled, že tím zachováme serialitu ve světě s, my ovšem potřebujeme zachovat serialitu v celém modelu. Tady přichází ke slovu tvrzení, které jsme si připravili v rámci výkladu specifičnosti $\mathsf{KD45}$ modelů, totiž že splněnost formule $\hat{K}\varphi$ v libovolném světě modelu M už zaručuje její splněnost ve všech jeho světech. Při této definici by tedy serialita skutečně byla zachována, a domníváme se, že i v jiných ohledech by toto řešení bylo vyhovující. Bohužel, opustíme-li jednoagentní $\mathsf{KD45}$ a její přívětivé modely, problém se zachováním seriality se nám tímto způsobem vyřešit nepodaří.

Zůstaňme třeba ještě v $\mathsf{KD45}$ a jen se přenesme do její multiagentní verze. Tady bychom samozřejmě potřebovali zachovat serialitu relace každého z agentů z dané skupiny B, tedy potřebovali bychom mít v každém světě modelu M splněnou formuli $\hat{K}_a\varphi$ pro každé $a \in A$. V návaznosti na řešení v jednoagentní $\mathsf{KD45}$ se tedy nabízí následující obměna definice veřejného prohlášení:

$$M, s \models [\varphi]\,\psi \text{ právě tehdy, když } M, s \models \hat{E}_B\varphi \text{ implikuje } M|_{R\varphi} \models \psi,$$

kde $\hat{E}_B\varphi$ je zkratka pro $\bigwedge_{a\in B} \hat{K}_a\varphi$ (tedy $\hat{E}$ zde není duálním operátorem k E!). Tím se ale bohužel náš problém nevyřeší, protože jak už jsme dříve naznačili, v multiagentním modelu už se splněnost formule tvaru $\hat{K}\varphi$ tak pěkně nešíří. Podívejme se znovu na příklad.



Je zřejmé, že ve světě s je splněna formule $\hat{E}_{\{a,b\}}\varphi$, ale například ve světě u už nikoli, protože agent a je v něm přesvědčen o $\neg\varphi$. Prohlášením φ ve světě s tedy podle poslední navržené definice porušíme ve světě u serialitu relace pro agenta a.

V tuto chvíli si můžeme ještě vzpomenout na operátor C_B, který přece umí zajistit šíření formule i po cestě přes relace různých agentů, ale ani to nám nepomůže. Podíváme-li se ještě na poslední obrázek a představíme si, že ve světě s je splněna formule $C_{\{a,b\}}\hat{E}_{\{a,b\}}\psi \wedge \hat{E}_{\{a,b\}}\psi$ pro nějaké ψ, skutečně tím máme zaručenu splněnost formule $\hat{E}_{\{a,b\}}\psi$ v celém modelu. My ale potřebujeme umět vyhodnocovat formule tvaru $[\varphi]\,\psi$ v libovolném světě daného modelu, a kdybychom formuli $[\varphi]\,\psi$ vyhodnocovali podle definice

$$M, s \models [\varphi]\,\psi \text{ právě tehdy, když } M, s \models C_B\hat{E}_B\varphi \wedge \hat{E}_B\varphi \text{ implikuje } M|_{R\varphi} \models \psi$$

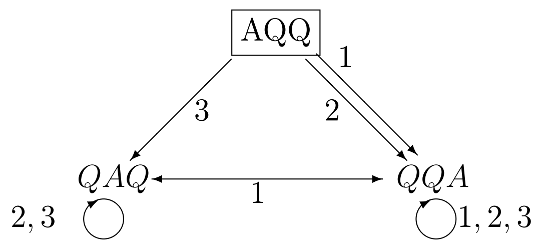
třeba ve světě t, z něhož ostatní světy nejsou dosažitelné ani přes sjednocení relací, formule $\hat{E}_{\{a,b\}}$ by se nám nikam nerozšířila, a opět například ve světě u by byla porušena serialita relace pro agenta a.

Zdá se tedy, že tato cesta nikam nevede. Zkusme se ještě zamyslet nad tím, jestli by nešlo ořezávat relace nějak lokálně, vzhledem ke světu, v němž formuli $[\varphi]\,\psi$ vyhodnocujeme. Podívejme se, co se stane, když v definici přijmeme podmínku na pravdivost $\hat{E}_B\varphi$ ve světě s, v němž formuli φ prohlašujeme, a budeme ořezávat jen takové hrany do $\neg\varphi$ světů, které vedou přímo ze světa s. Je zřejmé, že tímto způsobem serialitu skutečně zachováme, bohužel zas ale ohrozíme tranzitivitu. Na našem posledním obrázku by například prohlášení φ znamenalo ponechat hrany (s, u) a (u, w), ale přitom ořezat hranu (s, w).

5.2 Možná řešení

Jako nejpřijatelnější řešení problému se zachováním seriality se tak jeví to, které nabízí David Steiner ve své dizertaci [Ste09]. Steiner zkoumá tzv. skupinové prohlášení, tedy prohlášení i jen k určité části dané skupiny agentů, a jeho problém je tak komplexnější. Využívá ovšem velmi podobnou sémantiku prohlášení a naráží na stejnou otázku, totiž jak zachovat serialitu v nově utvářeném modelu. Steiner ve své definici rovněž využívá splněnost formule $\hat{K}_a\varphi$, ale nezachází s ní jako s podmínkou pro proveditelnost prohlášení, nýbrž jako s podmínkou pro ořezání relace v jednotlivých světech. Přesněji řečeno, ořezává hrany vedoucí do $\neg\varphi$ světů jen tehdy, když ze světa, z kterého daná hrana vede, vede zároveň alespoň jedna hrana do nějakého φ světa. V řeči agentů to můžeme interpretovat tak, že agent přijímá v každém možném světě novou informaci jen tehdy, když ji v daném světě považuje za možnou. V případě, že je přesvědčen o její negaci, zcela ji ignoruje, a nová informace tak nemá na jeho dosavadní přesvědčení žádný vliv.

Než uvedeme formální definici, vraťme se ještě k příkladu karetních hráčů a ilustrujme si Steinerův přístup na něm. Jestliže nyní v situaci po prohlášení hráče 1, prohlásí hráč 2, že ani on nemá eso, což je tvrzení sporné s přesvědčením agenta 3, dospějeme k následujícímu stavu:



Vidíme, že hráč 3 tvrzení nepřijal a ponechal si své původní přesvědčení.

Jak už jsme naznačili, Steinerův postup pro utvoření nového modelu je složitější, protože musí hledět na to, aby prohlášení požadovaným způsobem změnilo přesvědčení agentů, kteří ho slyšeli, a přitom nemělo žádný vliv na přesvědčení ostatních agentů. Ti totiž prohlášení nejen neslyšeli, ale ani netuší, že se vůbec nějaké prohlášení koná, takže se nemá změnit ani jejich přesvědčení o přesvědčení těch agentů, kteří prohlášení slyšeli. Steiner si tedy nevystačí s pouhým ořezáváním relací, nýbrž vytváří nový model pomocí dvou kopií množiny možných světů původního modelu, a do nich pak patřičným způsobem doplňuje relaci dosažitelnosti. Definici lze nalézt v [Ste09, str. 133] a my ji zde uvádět nebudeme, zkusme ale využít její nápad se zachováním seriality a upravit ji pro naše potřeby.

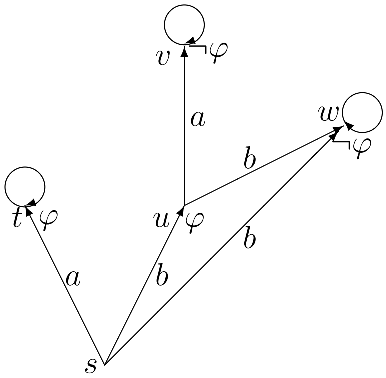
Definice 5.1. *Splněnost formule* $[\varphi]\,\psi$ *ve světě* s *kripkovského modelu* $M = (S, \rightarrow_a, V)$ *je dána následující podmínkou:*

$$M, s \models [\varphi]\,\psi \text{ právě tehdy, když } M|_{R\varphi}, s \models \psi,$$

kde $M|_{R\varphi} = (S', \rightarrow'_a, V')$ *je definováno následovně:*

$$\begin{aligned} S' &= S \\ \rightarrow'_a &= \rightarrow_a \cap (\{(s,t); M,t \models \varphi\} \cup \{(s,t); M,s \models K_a\neg\varphi\}) \\ V'_p &= V_p \end{aligned}$$

Z této definice a jejího předchozího výkladu je snad zřejmé, že takto nastavené ořezávání skutečně zachovává serialitu relace dosažitelnosti. Spokojeni jsme s ní však opět jen částečně, protože pro změnu nezachovává tranzitivitu, respektive zachovává ji, jen pokud je relace zároveň euklidovská. Použijme ještě jednou výše uvedený model a jen ho trochu pozměňme tak, aby byl seriální a tranzitivní, ale ne euklidovský.



Z posledního obrázku jsme tedy jen vypustili hrany (w, u) a (u, u) pro agenta b. Nyní bychom podle předchozí definice měli prohlášením formule φ vypustit jednu jedinou hranu, a to hranu z s do w. Tím ovšem porušíme tranzitivitu relace mezi světy s, u, w.

Skutečnost, že je-li relace zároveň euklidovská, tranzitivita už zachována bude, si vyslovme v následujícím tvrzení. Poznamenejme ještě, že podobně euklidovskost se přenáší do ořezaného modelu jen za současné tranzitivity relace dosažitelnosti, to už ale pro naše potřeby není nijak omezující, protože jak jsme deklarovali ve druhé kapitole, axiom definující euklidovskost přijímáme, jen pokud jsme přijali zároveň axiom odpovídající tranzitivitě.

Tvrzení 5.2. *Je-li model* M *tranzitivní a euklidovský, pak rovněž model* $M|_{R\varphi}$ *z definice 5.1 je tranzitivní a euklidovský.*

Důkaz: Mějme tedy model M, který je tranzitivní a euklidovský, a předpokládejme sporem, že model $M|_{R\varphi}$ není tranzitivní. Označíme-li relaci výchozího modelu $\rightarrow_a$ a relaci ořezaného modelu $\rightarrow'_a$, předpokládáme, že existují světy s, t, u, takové, že $s \rightarrow'_a t$, $t \rightarrow'_a u$, přitom ale $s \not\rightarrow'_a u$, pro nějakého agenta a. Model M byl ale tranzitivní, tedy platilo $s \rightarrow_a u$, a protože byl euklidovský, platilo i $u \rightarrow_a t$, $t \rightarrow_a t$ a $u \rightarrow_a u$. To, že jsme neořezali hranu $s \rightarrow_a t$ a přitom ořezali hranu $s \rightarrow_a u$ znamená, že $M, t \models \varphi$ a $M, u \models \neg\varphi$. To, že jsme zároveň neořezali hranu $t \rightarrow_a u$, ačkoli vede do $\neg\varphi$-světa, znamená, že z t vedou hrany jen do samých $\neg\varphi$-světů. To je ale spor, protože $t \rightarrow_a t$ a přitom $M, t \models \varphi$.

Zachování euklidovskosti se ukáže podobně. □

Tato sémantika veřejného prohlášení by tedy mohla posloužit k dynamickému rozšíření systémů KD_n, $\mathsf{KD45}_n$, nikoli však systému $\mathsf{KD4}_n$. Podařilo by se nám definici 5.1 upravit tak, aby zachovávala serialitu a tranzitivitu, aniž by k tomu byla potřeba euklidovskost? Podívejme se, že ano. Vrátíme-li se ještě k poslednímu obrázku, tedy k modelu, který je seriální a tranzitivní, ne však euklidovský, může nás napadnout, že k porušení tranzitivity, kterou jsme před chvílí demonstrovali, by bývalo nedošlo, kdybychom současně s hranou (s, w) ořezali i hranu (u, w). Ta vede (samozřejmě) také do $\neg\varphi$-světa a její případné ořezání by tedy mohlo mít dobrý smysl. Důvod jejího ponechání v modelu byl ten, že ze světa u nevedla pro agenta b žádná hrana do φ-světa. To nás může přivést k myšlence ještě silněji podmínit ořezávání hran, totiž ořezat libovolnou hranu (s, t) (vedoucí do $\neg\varphi$-světa t) jen tehdy, když ze světa s vedou hrany jen do takových světů, z nichž vede alespoň jedna hrana do φ-světa. Formální definice by tedy vypadala následovně.

Definice 5.3. *Splněnost formule $[\varphi]\psi$ ve světě s kripkovského modelu $M = (S, \rightarrow_a, V)$ je dána následující podmínkou:*

$$M, s \models [\varphi]\psi \text{ právě tehdy, když } M|_{R\varphi}, s \models \psi$$

kde $M|_{R\varphi}$ je definováno následovně:

$$\begin{aligned} S' &= S \\ \rightarrow'_a &= \rightarrow_a \cap (\{(s,t); M, t \models \varphi\} \cup \{(s,t); M, s \models \hat{K}_a K_a \neg\varphi\}) \\ V'_p &= V_p \end{aligned}$$

Podívejme se, že při této definici bude tranzitivita zachována, a to bez předpokladu euklidovskosti. Ukažme si tentokrát i zachování seriality, které se nám zdá o něco méně zřejmé než u předchozí definice.

Tvrzení 5.4. *Je-li model M seriální a tranzitivní, pak rovněž model $M|_{R\varphi}$ z definice 5.3 je seriální a tranzitivní.*

Důkaz: Mějme tedy model M, který je seriální a tranzitivní, a předpokládejme sporem, že model $M|_{R\varphi}$ není seriální, tedy existuje svět s, z něhož v modelu $M|_{R\varphi}$ nevede žádná hrana. Model M ale seriální je, tedy existuje svět t, takový že $s \to_a t$. Protože ale $s \not\to'_a t$, platí $M, t \models \neg\varphi$ a $M, s \models \neg\hat{K}_a K_a \neg\varphi$, tedy $M, s \models K_a \neg K_a \neg\varphi$. To znamená, že $M, t \models \neg K_a \neg\varphi$, tedy existuje svět u takový, že $M, u \models \varphi$. Z tranzitivity je svět u dosažitelný z s, a to je spor s předpokladem, že z s nevede v modelu $M|_{R\varphi}$ žádná hrana.

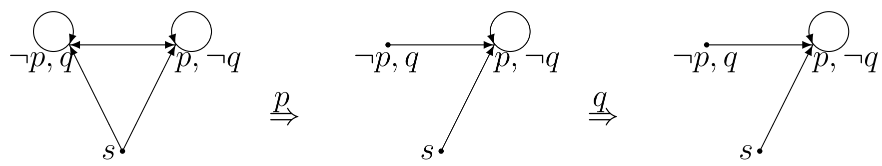
Ověřme tranzitivitu, tedy předpokládejme opět sporem, že model $M|_{R\varphi}$ není tranzitivní, neboli existují světy s, t, u takové, že $s \to_a t \to_a u$, a přitom $s \not\to_a u$. To znamená, že $M, u \models \neg\varphi$ a $M, s \models K_a \neg K_a \neg\varphi$. Protože hrana (t, u) ořezána nebyla, ačkoli $M, u \models \neg\varphi$, platí $M, t \models \hat{K}_a K_a \neg\varphi$, tedy existuje svět v takový, že $M, v \models K\neg\varphi$. Z tranzitivity je ale svět v dosažitelný z s, tedy z $M, s \models K_a \neg K_a \neg\varphi$ plyne $M, v \models \neg K_a \neg\varphi$, a to je spor. □

Tuto sémantiku bychom tedy mohli použít pro dynamické rozšíření systému $\mathsf{KD4}_n$, pro který nebyla použitelná sémantika z definice 5.1. Všimněme si ještě, že v předchozím důkazu jsme při ověření seriality využili tranzitivitu, a skutečně, snadno bychom sestrojili netranzitivní seriální model, který po prohlášení podle definice 5.3 seriálním nebude. Tím chceme naznačit, že se nám nepodařilo nalézt sémantiku použitelnou pro všechny tři systémy zkoumané v této kapitole. Máme tedy jednu sémantiku pro systémy KD_n, $\mathsf{KD45}_n$ a druhou pro $\mathsf{KD4}_n$ (ta je rovněž použitelná pro $\mathsf{KD45}_n$, jak se dá také ukázat).

Tím se dostáváme k axiomatice, a rovnou přiznejme, že si s ní nevíme rady. Zůstaňme třeba u definice 5.1 pro systémy KD_n, $\mathsf{KD45}_n$. Pokud bychom se omezili na jazyk bez obecné znalosti, mohli bychom snad s určitými obměnami převzít tu, kterou nabízí Steiner. V té ovšem chybí redukční axiom pro po sobě jdoucí prohlášení, tedy pro formule tvaru $[\varphi]\,[\psi]\,\chi$, a bez něj neumíme axiomatiku rozšířit pro jazyk s operátorem C_B.

Ačkoli je naše teorie jednodušší v tom, že veřejné prohlášení míří vždy k celé skupině agentů, redukční axiom pro formule $[\varphi]\,[\psi]\,\chi$ se nám rovněž nedaří vytvořit. Podívejme se jen, že redukční axiom ve tvaru, v němž fungoval ve všech systémech, které jsme zatím zkoumali, tedy v tomto $[\varphi]\,[\psi]\,\chi \leftrightarrow [\varphi \wedge [\varphi]\,\psi]\,\chi$, nelze převzít.

Podle definice 5.1 platí $M, s \models [\varphi]\,[\psi]\,\chi$ právě tehdy, když $M|_{R\varphi}|_{R\psi} \models \chi$, a na druhé straně $M, s \models [\varphi \wedge [\varphi]\,\psi]\,\chi$ platí právě tehdy, když $M|_{R(\varphi\wedge[\varphi]\psi)} \models \chi$. Potřebovali bychom tedy ukázat, že modely $M|_{R\varphi}|_{R\psi}$ a $M|_{R(\varphi\wedge[\varphi]\psi)}$ jsou ekvivalentní, ukažme si ale na jednoduchém příkladě, že tomu tak není.



Poslední model v řadě je modelem $M|_{Rp}|_{Rq}$. Model $M|_{R(p\wedge[p]q)}$ je přitom stejný jako M, protože formule $p \wedge [p]\, q$ není splněna ani v jednom ze světů dosažitelných z s, a k ořezávání tak vůbec nedochází.

Změnit pravou stranu redukčního axiomu tak, aby byla při definici 5.1 ekvivalentní s formulí $[\varphi]\,[\psi]\,\chi$, se nám bohužel nedaří, a domníváme se, že pokud takto redukční axiom vůbec vytvořit lze, může to být dosti komplikované, vzhledem k nepravidelnostem v ořezávání relace. S tím souvisí i otázka, zda bychom při takto nadefinovaném prohlášení dokázali určit nějaké podmínky, za kterých by prohlášení vedlo k obecnému přesvědčení. Totéž prohlášení totiž ve stejné situaci někteří agenti přijímají mezi své přesvědčení, jiní nikoli.

Zkoumání v této kapitole tedy uzavíráme jako neúspěšné. K problému se zachováním bezespornosti přesvědčení snad jen ještě poznamenejme, že snaha dopátrat se jeho řešení v literatuře nás přivádí k teorii „*belief revision*“. Ta zkoumá právě takový problém, totiž jak do množiny přesvědčení $\mathcal{K}$ začlenit novou informaci φ, která je typicky s množinou $\mathcal{K}$ sporná, tak, aby nově vzniklá množina $\mathcal{K} * \varphi$ byla bezesporná, obsahovala φ, a jinak byla co nejpodobnější původní množině $\mathcal{K}$. Teorie „belief revision“ ovšem uvažuje pouze jednoho agenta (a množinu jeho přesvědčení) a pouze faktické informace (nikoli informace o něčím přesvědčení), a začlenění její idey do dynamické epistemické logiky je tak docela komplexní problém, kterému už se v této práci věnovat nebudeme. Z článků, které se touto otázkou zabývají, odkažme například na [Ben04] nebo [Dit05].

6 Úplnost

V této kapitole předkládáme důkazy úplnosti systémů zkoumaných ve čtvrté kapitole, tedy systémů s přesvědčivým prohlášením. V první podkapitole uvádíme důkaz úplnosti systémů bez obecného přesvědčení, v druhé podkapitole systémů s obecným přesvědčením. Oba důkazy vznikly úpravami důkazů systémů $\mathsf{S5}_n^{\mathsf{PA}}$ a $\mathsf{S5}_n^{\mathsf{PAC}}$, uvedených v knize [Dit08].

6.1 Systémy bez obecného přesvědčení

V následující tabulce je shrnuta axiomatika systému $\mathsf{K45}_n^{\mathsf{PA}}$, systém $\mathsf{K4}_n^{\mathsf{PA}}$ z něj získáme vynecháním axiomu (5) a systém $\mathsf{K}_n^{\mathsf{PA}}$ vynecháním axiomů (4) a (5).

(VT)	všechny výrokové tautologie	
(K)	$K_a(\varphi \to \psi) \to (K_a\varphi \to K_a\psi)$	
(MP)	$\varphi, \varphi \to \psi/\psi$	(modus ponens)
(NecK)	$\varphi/K_a\varphi$	(přidání nutnosti K)
(4)	$K_a\varphi \to K_aK_a\varphi$	(pozitivní introspekce)
(5)	$\neg K_a\varphi \to K_a\neg K_a\varphi$	(negativní introspekce)
($\mathsf{PA1_K}$)	$[\varphi]\, p \leftrightarrow p$	(atom po prohlášení)
($\mathsf{PA2_K}$)	$[\varphi]\, \neg\psi \leftrightarrow \neg\, [\varphi]\, \psi$	(negace po prohlášení)
($\mathsf{PA3_K}$)	$[\varphi]\, (\psi \wedge \chi) \leftrightarrow [\varphi]\, \psi \wedge [\varphi]\, \chi$	(konjunkce po prohlášení)
($\mathsf{PA4_K}$)	$[\varphi]\, K_a\psi \leftrightarrow K_a(\varphi \to [\varphi]\, \psi)$	(přesvědčení po prohlášení)
($\mathsf{PA5_K}$)	$[\varphi]\, [\psi]\, \chi \leftrightarrow [\varphi \wedge [\varphi]\, \psi]\, \chi$	(kompozice prohlášení)
(NecPA)	$\varphi/\, [\psi]\, \varphi$	(přidání nutnosti $[\psi]$)

Jazyk logiky $\mathsf{K}_n^{\mathsf{PA}}$ (resp. $\mathsf{K4}_n^{\mathsf{PA}}$, resp. $\mathsf{K45}_n^{\mathsf{PA}}$) je stejně silný jako jazyk logiky $\mathsf{K_n}$ (resp. $\mathsf{K4_n}$, resp. $\mathsf{K45_n}$), neboli pro každou formuli v jazyce $\mathcal{L}_n^{PA}$ umíme najít formuli v jazyce $\mathcal{L}_n$, která je s ní ekvivalentní. K nalezení takové formule nám poslouží překladová funkce, využívající redukčních axiomů. Úplnost $\mathsf{K}_n^{\mathsf{PA}}$ pak plyne z úplnosti $\mathsf{K_n}$.

Následující definice je obdobou definice 7.20 z [Dit08] a liší se od ní podobně jako se liší redukční axiomy pro přesvědčivé prohlášení od redukčních axiomů pro pravdivé prohlášení.

Definice 6.1 (Překladová funkce)**.** *Funkce $t : \mathcal{L}_n^{PA} \to \mathcal{L}_n$ je definována* *následovně:*

$$\begin{array}{rcl} t(p) & = & p \\ t(\neg\varphi) & = & \neg t(\varphi) \\ t(\varphi \wedge \psi) & = & t(\varphi) \wedge t(\psi) \\ t(K_a\varphi) & = & K_a t(\varphi) \\ t([\varphi]\, p) & = & t(p) \\ t([\varphi]\, \neg\psi) & = & t(\neg\, [\varphi]\, \psi) \\ t([\varphi]\, (\psi \wedge \chi)) & = & t([\varphi]\, \psi \wedge [\varphi]\, \chi) \\ t([\varphi]\, K_a\psi) & = & t(K_a(\varphi \rightarrow [\varphi]\, \psi)) \\ t([\varphi]\, [\psi]) & = & t([\varphi \wedge [\varphi]\, \psi]\, \chi) \end{array}$$

Díky funkci z předchozí definice tedy můžeme každou formuli obsahující veřejné prohlášení převést na formuli bez veřejného prohlášení takovou, že její význam zůstane zachován. To nám zaručuje korektnost redukčních axiomů. Ještě potřebujeme ukázat, že každá formule je dokazatelně ekvivalentní s její translací. To bychom rádi dokazovali indukcí podle složitosti formule. V takových důkazech se v indukčním kroku zpravidla využívá předpokladu pro *podformule* dané formule, to ale v našem případě nebude možné. Podíváme-li se na definici translace, vidíme, že ne vždy jsou formule na pravé straně podformulemi formulí na levé straně, například $K_a(\varphi \rightarrow [\varphi]\, \psi)$ není podformulí formule $[\varphi]\, K_a\psi$. Musíme si proto nadefinovat jinou míru složitosti, kterou se vypořádáme i s případy nevyhovujícími běžné složitosti přes podformule.

Míru složitosti lze převzít přesně tak, jak je nastavena v definici 7.21 z [Dit08], což ještě ověříme v následném lemmatu.

Definice 6.2 (Složitost formule)**.** *Míra složitosti $c : \mathcal{L}_n^{PA} \rightarrow \mathbb{N}$ je definována následovně:*

$$\begin{array}{rcl} c(p) & = & 1 \\ c(\neg\varphi) & = & 1 + c(\varphi) \\ c(\varphi \wedge \psi) & = & 1 + max(c(\varphi), c(\psi)) \\ c(K_a\varphi) & = & 1 + c(\varphi) \\ c([\varphi]\, \psi) & = & (4 + c(\varphi)) \cdot c(\psi) \end{array}$$

Lemma 6.3. *Pro každé φ, ψ a χ platí:*

1. $c(\psi) \geqslant c(\varphi)$*, jestliže* $\varphi \in Sub(\psi)$
2. $c([\varphi]\, p) > c(p)$
3. $c([\varphi]\, \neg\psi) > c(\neg\, [\varphi]\, \psi)$

4. $c([\varphi]\,(\psi \wedge \chi)) > c([\varphi]\,\psi \wedge [\varphi]\,\chi)$
5. $c([\varphi]\,K_a\psi) > c(K_a(\varphi \rightarrow [\varphi]\,\psi))$
6. $c([\varphi]\,[\psi]\,\chi) > c([\varphi \wedge [\varphi]\,(\psi)]\,\chi)$

Důkaz: Důkaz lemmatu z [Dit08], kterému toto lemma odpovídá, je ponechán jako cvičení, navíc jeho znění je v důsledku odlišností mezi redukčními axiomy jiné, a tak si raději dokažme alespoň bod 5., v němž lze snad nejspíše očekávat nějaké komplikace, a bod 6., který je z těch pracnějších.

Vypočítáme postupně levou a pravou stranu nerovnosti a porovnáme je.

$$\begin{aligned} c([\varphi]\,K_a\psi) &= (4 + c(\varphi)) \cdot c(K_a\psi) = (4 + c(\varphi)) \cdot (1 + c(\psi)) = \\ &= 4 + 4c(\psi) + c(\varphi) \cdot c(\psi) + c(\varphi) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} c(K_a(\varphi \rightarrow [\varphi]\,\psi)) &= 1 + c(\varphi \rightarrow [\varphi]\,\psi) = 1 + c(\neg(\varphi \wedge \neg\,[\varphi]\,\psi)) = \\ &= 1 + 1 + c(\varphi \wedge \neg\,[\varphi]\,\psi) = \\ &= 2 + 1 + max(c(\varphi), c(\neg\,[\varphi]\,\psi)) = 3 + c(\neg\,[\varphi]\,\psi) = \\ &= 3 + 1 + c([\varphi]\,\psi) = 4 + (4 + c(\varphi)) \cdot c(\psi) = \\ &= 4 + 4 \cdot c(\psi) + c(\varphi) \cdot c(\psi) \end{aligned}$$

Vidíme, že levá strana je větší o $c(\varphi)$, které je určitě $\geqslant 1$.

$$\begin{aligned} c([\varphi]\,[\psi]\,\chi) &= (4 + c(\varphi)) \cdot c([\psi]\,\chi) = (4 + c(\varphi)) \cdot (4 + c(\psi)) \cdot c(\chi) = \\ &= (4 + c(\varphi)) \cdot (4 \cdot c(\chi) + c(\psi) \cdot c(\chi)) = \\ &= 16 \cdot c(\chi) + 4 \cdot c(\psi) \cdot c(\chi) + 4 \cdot c(\varphi) \cdot c(\chi) + c(\varphi) \cdot c(\psi) \cdot c(\chi) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} c([\varphi \wedge [\varphi]\,(\psi)]\,\chi) &= (4 + c(\varphi \wedge [\varphi]\,\psi)) \cdot c(\chi) = \\ &= (4 + 1 + max(c(\varphi), c([\varphi]\,\psi))) \cdot c(\chi) = \\ &= (5 + c([\varphi]\,\psi)) \cdot c(\chi) = (5 + (4 + c(\varphi)) \cdot c(\psi)) \cdot c(\chi) = \\ &= (5 + 4 \cdot c(\psi) + c(\varphi) \cdot c(\psi)) \cdot c(\chi) = \\ &= 5 \cdot c(\chi) + 4 \cdot c(\psi) \cdot c(\chi) + c(\varphi) \cdot c(\psi) \cdot c(\chi) \end{aligned}$$

Po vyškrtání sčítanců vyskytujících se v obou posledních řádcích nám zůstane na levé straně $16 \cdot c(\chi) + 4 \cdot c(\varphi) \cdot c(\chi)$ a na pravé straně $5 \cdot c(\chi)$. Levá strana je evidentně větší. □

Nyní už můžeme ukázat, že každá formule je dokazatelně ekvivalentní svému překladu pomocí funkce t.

Lemma 6.4. *: Nechť* $\mathsf{X}_n^{\mathsf{PA}}$ *je jeden ze systémů* $\mathsf{K}_n^{\mathsf{PA}}$, $\mathsf{K4}_n^{\mathsf{PA}}$, $\mathsf{K45}_n^{\mathsf{PA}}$. *Pak pro každou formuli* $\varphi \in \mathcal{L}_n^{PA}$ *platí*

$$\mathsf{X}_n^{\mathsf{PA}} \vdash \varphi \leftrightarrow t(\varphi).$$

Důkaz: indukcí podle $c(\varphi)$.

1. Jestliže φ je výroková proměnná p, pak tvrzení lemmatu je dokazatelné triviálně: $\vdash p \leftrightarrow p$.

2. Předpokládejme, že pro každé φ takové, že $c(\varphi) \leqslant n$ platí $\vdash \varphi \leftrightarrow t(\varphi)$. Případy pro negaci, konjunkci a epistemický operátor plynou přímo z indukčního předpokladu a z bodu 1. předchozího lemmatu. Z formulí s operátorem veřejného prohlášení si ukažme třeba případ pro $[\varphi]\, K_a\psi$.

Z redukčního axiomu pro přesvědčení po prohlášení máme přímo dokazatelnost $\vdash [\varphi]\, K_a\psi \leftrightarrow (\varphi \to K_a\, [\varphi]\, \psi)$. Podle bodu 5. předchozího lemmatu můžeme použít indukční předpoklad na pravou stranu ekvivalence a dostáváme tak $\vdash [\varphi]\, K_a\psi \leftrightarrow t(\varphi \to K_a\, [\varphi]\, \psi)$. Pak už stačí použít definici funkce t. $\square$

Jak už jsme zmínili v úvodu této podkapitoly, důkaz úplnosti našich systémů už teď plyne z úplnosti odpovídajících systémů bez veřejného prohlášení.

Věta 6.5. *Pro každou* $\varphi \in \mathcal{L}_n^{PA}$

$$\begin{aligned} \mathcal{K} \models \varphi \quad &\Rightarrow \quad \mathsf{K}_n^{\mathsf{PA}} \vdash \varphi \\ \mathcal{K}4 \models \varphi \quad &\Rightarrow \quad \mathsf{K4}_n^{\mathsf{PA}} \vdash \varphi \\ \mathcal{K}45 \models \varphi \quad &\Rightarrow \quad \mathsf{K45}_n^{\mathsf{PA}} \vdash \varphi \end{aligned}$$

Důkaz: Nechť X^{PA} je jeden ze systémů $\mathsf{K}_n^{\mathsf{PA}}$, $\mathsf{K4}_n^{\mathsf{PA}}$ a $\mathsf{K45}_n^{\mathsf{PA}}$, a $\mathcal{X}$ je odpovídající třída kripkovských struktur. Předpokládejme $\mathcal{X} \models \varphi$. Z $\mathsf{X}^{\mathsf{PA}} \vdash \varphi \leftrightarrow t(\varphi)$ a z korektnosti systému X^{PA} plyne $\mathcal{X} \models t(\varphi)$. Formule $t(\varphi)$ neobsahuje operátor [.], tedy z úplnosti X máme $\mathsf{X} \vdash t(\varphi)$. X je podsystémem X^{PA}, tedy i $\mathsf{X}^{PA} \vdash t(\varphi)$. Z $\mathsf{X}^{PA} \vdash \varphi \leftrightarrow t(\varphi)$ plyne $\mathsf{X}^{PA} \vdash \varphi$. $\square$

6.2 Systémy s obecným přesvědčením

V následující tabulce je shrnuta axiomatika systému $\mathsf{K45}_n^{\mathsf{PAC}}$, systém $\mathsf{K4}_n^{\mathsf{PAC}}$ z něj získáme vynecháním axiomu (5) a systém $\mathsf{K}_n^{\mathsf{PAC}}$ vynecháním axiomů (4) a (5).

(VT)	všechny výrokové tautologie	
(K)	$K_a(\varphi \to \psi) \to (K_a\varphi \to K_a\psi)$	(distribuce K)
(C)	$C_B\varphi \to E_B(\varphi \wedge C_B\varphi)$	(C jako pevný bod)
(MP)	$\varphi, \varphi \to \psi/\psi$	(modus ponens)
(NecK)	$\varphi/K_a\varphi$	(přidání nutnosti K)
(NecC)	$\varphi/C_B\varphi$	(přidání nutnosti C)
(RC)	$\varphi \to E_B(\psi \wedge \varphi)/\varphi \to C_B\psi$	(indukce pro C)
(4)	$K_a\varphi \to K_aK_a\varphi$	(pozitivní introspekce)
(5)	$\neg K_a\varphi \to K_a\neg K_a\varphi$	(negativní introspekce)
($\mathsf{PA1_K}$)	$[\varphi]\, p \leftrightarrow p$	(atom po prohlášení)
($\mathsf{PA2_K}$)	$[\varphi]\, \neg\psi \leftrightarrow \neg\, [\varphi]\, \psi$	(negace po prohlášení)
($\mathsf{PA3_K}$)	$[\varphi]\, (\psi \wedge \chi) \leftrightarrow [\varphi]\, \psi \wedge [\varphi]\, \chi$	(konjunkce po prohlášení)
($\mathsf{PA4_K}$)	$[\varphi]\, K_a\psi \leftrightarrow K_a(\varphi \to [\varphi]\, \psi)$	(přesvědčení po prohlášení)
($\mathsf{PA5_K}$)	$[\varphi]\, [\psi]\, \chi \leftrightarrow [\varphi \wedge [\varphi]\, \psi]\, \chi$	(kompozice prohlášení)
(NecPA)	$\varphi/\, [\psi]\, \varphi$	(přidání nutnosti $[\psi]$)
($\mathsf{RPAC_K}$)	$\chi \to E_B(\varphi \to [\varphi]\psi), \chi \to E_B(\varphi \to \chi)/$ $\chi \to [\varphi]C_B\psi$	(C po prohlášení)

Úplnost axiomatických systémů $\mathsf{K}_n^{\mathsf{PAC}}$, $\mathsf{K4}_n^{\mathsf{PAC}}$ a $\mathsf{K45}_n^{\mathsf{PAC}}$ budeme dokazovat kontrapozicí, tedy dokážeme, že pokud formule není odvoditelná, pak existuje model, v němž formule není splněna. To se obvykle ukazuje pomocí tzv. kanonického modelu, tedy konstrukcí jednoho velkého modelu, v němž je každá konzistentní množina formulí splněna v některém jeho světě. Protože ale systémy $\mathsf{K}_n^{\mathsf{PAC}}$, $\mathsf{K4}_n^{\mathsf{PAC}}$ a $\mathsf{K45}_n^{\mathsf{PAC}}$ jsou v jazyce s operátem C_B a nejsou tak kompaktní, nemůžeme vytvořit kanonický model pro všechny konzistentní množiny formulí v jazyce, nýbrž omezíme se na konečný fragment jazyka daný vyvracenou formulí, tzv. uzávěr formule, a vyrobíme pro něj konečný model. V ostatním už můžeme postupovat stejně jako u kompaktních systémů. Model tedy bude tvořen konečnými maximálními konzistentními množinami formulí v rámci uzávěru dané formule, a valuaci a relaci dosažitelnosti nadefinujeme tak, aby se nám podařilo dokázat tzv. Truth lemma. V něm se říká, že v každém světě modelu jsou splněny právě formule náležící do té maximální konzistentní množiny, která danému světu odpovídá. Po dokázání Truth lemmatu už větu o úplnosti dokážeme snadno.

Začněme tedy vytvořením zmíněného fragmentu jazyka. Následující definice je obdobou definice 7.27 z [Dit08], a následné lemma odpovídá lemmatu 7.28 z [Dit08].

Definice 6.6 (Uzávěr). *Pro každou formuli $\varphi \in \mathcal{L}_n^{PAC}$ je uzávěr $Sub^+(\varphi)$ definován jako nejmenší množina splňující následující podmínky:*

1. $\varphi \in Sub^+(\varphi)$,

2. pokud $\psi \in Sub^+(\varphi)$, pak $Sub(\psi) \subseteq Sub^+(\varphi)$, (kde $Sub(\psi)$ je množina všech podformulí formule φ),

3. pokud $\psi \in Sub^+(\varphi)$ a ψ není negace, pak $\neg\psi \in Sub^+(\varphi)$,

4. pokud $C_B\psi \in Sub^+(\varphi)$, pak $\{K_a(\psi \wedge C_B\psi); a \in B\} \subseteq Sub^+(\varphi)$,

5. pokud $[\psi]\, p \in Sub^+(\varphi)$, pak $p \in Sub^+(\varphi)$

6. pokud $[\psi]\, \neg\chi \in Sub^+(\varphi)$, pak $\neg\, [\psi]\, \chi \in Sub^+(\varphi)$

7. pokud $[\psi]\, \chi \wedge \xi \in Sub^+(\varphi)$, pak $([\psi]\, \chi \wedge [\psi]\, \xi) \in Sub^+(\varphi)$

8. pokud $[\psi]\, K_a\chi \in Sub^+(\varphi)$, pak $K_a(\psi \rightarrow [\psi]\, \chi) \in Sub^+(\varphi)$

9. pokud $[\psi]\, C_B\chi \in Sub^+(\varphi)$, pak $[\psi]\, \chi \in Sub^+(\varphi)$ a $\{K_a(\psi \rightarrow [\psi]\, (\chi \wedge C_B\chi)); a \in B\} \subseteq Sub^+(\varphi)$

Lemma 6.7. *Pro každou formuli $\varphi \in \mathcal{L}_n^{PAC}$ je $Sub^+(\varphi)$ konečná množina.*

Důkaz: Indukcí podle složitosti formule φ.

1. Pokud φ je výroková proměnná p, pak jejím uzávěrem je $\{p, \neg p\}$, tedy konečná množina.

2. Rozlišíme případy pro formule tvaru $\neg\psi, \psi \wedge \chi, K_a\psi, C_B\psi, [\psi]\, p, [\psi]\, \neg\chi, [\psi]\, (\chi \wedge \xi), [\psi]\, K_a\chi, [\psi]\, C_B\chi$. Dokažme například formuli $[\psi]\, C_B\chi$, která není zahrnuta v důkazu odpovídajícího lemmatu v [Dit08]. Jejím uzávěrem je množina $\{Sub^+(\psi) \cup Sub^+(C_B\chi) \cup \{[\psi]\, C_B\chi, \neg\, [\psi]\, C_B\chi\} \cup \{K_a(\psi \rightarrow [\psi]\, (\psi \wedge C\chi)), \neg K_a(\psi \rightarrow [\psi]\, (\psi \wedge C\chi)); a \in B\}\}$. Protože $Sub^+(\psi)$ a $Sub^+(C_B\chi)$ jsou podle indukčního předpokladu konečné a B je konečná, je konečná rovněž tato množina. □

Definice 6.8 (Maximální konzistentní množina)**.** *Nechť $\Phi \subseteq \mathcal{L}_n^{PAC}$ je uzávěr nějaké formule. Pak Γ je maximální konzistentní množina v Φ právě tehdy, když platí následující podmínky:*

1. $\Gamma \subseteq \Phi$

2. *Γ je konzistentní* ($\Gamma \nvdash \perp$)

3. *Γ je maximální v Φ (neexistuje $\Gamma' \subseteq \Phi$ taková, že $\Gamma \subset \Gamma'$ a $\Gamma \nvdash \perp$).*

Jak jsme již zmínili v úvodu této podkapitoly, maximální konzistentní množiny z předchozí definice nám poslouží jako možné světy chystaného kanonického modelu. Aby se nám podařilo dokázat Truth lemma, je potřeba vhodně nadefinovat také valuaci a relaci dosažitelnosti v kanonickém modelu. V definici kanonického modelu z [Dit08] je relace dosažitelnosti vytvořena rovnou jako ekvivalence, a pro naše potřeby je tedy nevyhovující. Využíváme proto obecnější definici relace dosažitelnosti, převzatou z [Fag95]. K tomu se nám bude hodit následující značení: $\Gamma/K_a = \{\varphi; K_a\varphi \in \Gamma\}$.

Definice 6.9 (Kanonický model pro Φ)**.** *Nechť Φ je uzávěr nějaké formule. Kanonický model $M = (S, \rightarrow, V)$ pro uzávěr Φ je definován následovně:*

- $S = \{\Gamma; \Gamma$ *je maximální konzistentní množina v uzávěru* $\Phi\}$
- $\Gamma \rightarrow_a \Delta$ *právě tehdy, když* $\Gamma / K_a \subseteq \Delta$
- $V_p = \{\Gamma \in S; p \in \Gamma\}$

Následující lemma zaručuje, že každou konzistentní množinu formulí můžeme rozšířit na maximální konzistentní množinu, a je jedním z klíčových kroků hlavní konstrukce našeho důkazu úplnosti. Je to obecné tvrzení o maximálních konzistentních množinách, a můžeme ho převzít ve stejné podobě, v jaké je uvedeno v [Dit08], a to včetně důkazu.

Lemma 6.10 (Lindenbaumovo)**.** *Nechť Φ je uzávěr nějaké formule. Pak každá konzistentní podmnožina Φ je podmnožinou nějaké maximální konzistentní podmnožiny Φ.*

Důkaz: Viz. důkaz lemmatu 7.12 z [Dit08]. □

V dalším lemmatu uvádíme některé vlastnosti maximálních konzistentních množin, které budeme často využívat ve zbylé části důkazu. Vynechejme zatím dvě vlastnosti týkající se formulí $C_B\varphi$ a $[\varphi]\, C_B\psi$. Body 1., 2. a 3. následujícího lemmatu jsou stejné jako v lemmatu 7.14 z [Dit08], kde jsou uvedeny i s důkazem, ale abychom se s vlastnostmi maximálních konzistentních množin lépe sžili, dokažme si je i zde. V bodě 4. už se zachází s relací dosažitelnosti v kanonickém modelu a jeho znění je jiné než v [Dit08]. Postup, který v něm využijeme, je převzatý z [Fag95] a ve zbylé části důkazu úplnosti ho využijeme ještě několikrát. Bod 5. už je opět obecným tvrzením o maximálních konzistentních množinách, ale v [Dit08], stejně jako v [Fag95], je jeho důkaz ponechán jako cvičení, a raději si ho tedy také dokážeme.

Připomeňme ještě, že maximální konzistentní množiny jsou konečné, tedy konjunkce přes každou z nich je konečná formule. Ve zbytku důkazu budeme konjunkci formulí z Γ značit $\bigwedge \Gamma$.

Lemma 6.11. *Nechť Φ je uzávěr nějaké formule a $M = (S, \rightarrow_a, V)$ je kanonický model pro Φ. Jestliže Γ a Δ jsou maximální konzistentní množiny v Φ, pak*

1. *Γ je deduktivně uzavřená v Φ (pro každou formuli φ platí, že pokud $\vdash \bigwedge \Gamma \rightarrow \varphi$, pak $\varphi \in \Gamma$),*
2. *pokud $\neg\varphi \in \Phi$, pak $\varphi \in \Gamma$ právě tehdy, když $\neg\varphi \notin \Gamma$,*

3. pokud $(\varphi \wedge \psi) \in \Phi$*, pak* $(\varphi \wedge \psi) \in \Gamma$ *právě tehdy, když* $\varphi \in \Gamma$ *a* $\psi \in \Gamma$*,*

4. pokud $K_a\varphi \in \Phi$*, pak* $K_a\varphi \in \Gamma$ *právě tehdy, když* $\varphi \in \Delta$ *pro každé* Δ *takové, že* $\Gamma \rightarrow_a \Delta$*,*

5. $\vdash \bigvee\{\bigwedge\Gamma; \Gamma$ *je maximální konzistentní množina v uzávěru* $\Phi\}$

Důkaz: 1. Vezměme $\varphi \in \Phi$ takovou, že $\Gamma \vdash \varphi$. Pak $\Gamma \cup \{\varphi\}$ je konzistentní, a protože Γ je maximální, musí už být $\varphi \in \Gamma$.

2. Jestliže je $\varphi \in \Gamma$, pak už nemůže být $\neg\varphi \in \Gamma$, jinak by Γ nebyla konzistentní. Na druhou stranu předpokládejme, že $\neg\varphi \notin \Gamma$. To může vzhledem k tomu, že Γ je maximální, nastat jen díky tomu, že $\Gamma \cup \{\neg\varphi\}$ není konzistentní. Pak ale $\Gamma \vdash \varphi$, a tedy i $\varphi \in \Gamma$, protože Γ je deduktivně uzavřená.

3. Využijeme-li opět již dokázané deduktivní uzavřenosti množiny Γ, dostáváme $(\varphi \wedge \psi) \in \Gamma$ právě tehdy, když $\Gamma \vdash (\varphi \wedge \psi)$ právě tehdy, když $\Gamma \vdash \varphi$ a $\Gamma \vdash \psi$ právě tehdy, když $\varphi \in \Gamma$ a $\psi \in \Gamma$.

4. Dokažme nejprve implikaci zleva doprava. Předpoklad $K_a\varphi \in \Gamma$ znamená, že $\varphi \in \Gamma/K_a$. Ale Γ/K_a je podle definice relace dosažitelnosti částí každé množiny Δ dosažitelné jedním krokem z Γ. Tedy $\varphi \in \Delta$ pro každé Δ takové, že $\Gamma \rightarrow_a \Delta$.

Nyní dokažme implikaci zprava doleva. Předpokládejme, že $\varphi \in \Delta$ pro každé Δ takové, že $\Gamma \rightarrow_a \Delta$, a dokažme nejprve sporem, že množina $\Gamma/K_a \cup \{\neg\varphi\}$ není konzistentní. Nechť tedy je konzistentní. Pak ji lze rozšířit na nějakou maximální konzistentní množinu Δ. Z konstrukce množiny Δ dostáváme $\Gamma \rightarrow_a \Delta$ a $\neg\varphi \in \Delta$, tedy $\varphi \notin \Delta$, to je ale spor s předpokladem. Označíme-li si tedy $\varphi_1, ..., \varphi_n$ formule z množiny Γ/K_a, dostaneme nekonzistentní množinu $\{\varphi_1, ..., \varphi_n, \neg\varphi\}$. Z toho, z pravidla (NecK), z axiomu (K) a pravidla (MP) dostaneme dokazatelnost následujících řádků.

$$
\begin{array}{ll}
\vdash & \varphi_1 \rightarrow (\varphi_2 \rightarrow (... \rightarrow (\varphi_n \rightarrow \varphi)...)) \\
\vdash & K_a(\varphi_1 \rightarrow (\varphi_2 \rightarrow (... \rightarrow (\varphi_n \rightarrow \varphi)...))) \\
\vdash & K_a(\varphi_1 \rightarrow (\varphi_2 \rightarrow (... \rightarrow (\varphi_n \rightarrow \varphi)...))) \rightarrow \\
 & \rightarrow (K_a\varphi_1 \rightarrow (K_a\varphi_2 \rightarrow (... \rightarrow (K_a\varphi_n \rightarrow K_a\varphi))...))) \\
\vdash & K_a\varphi_1 \rightarrow (K_a\varphi_2 \rightarrow (... \rightarrow (K_a\varphi_n \rightarrow K_a\varphi)...))
\end{array}
$$

Protože formule $\varphi_1, ..., \varphi_n$ jsou z množiny Γ/K_a, jsou formule $K_a\varphi_1, ..., K_a\varphi_n$ z Γ. Z toho a z dokazatelnosti posledního řádku plyne $K_a\varphi \in \Gamma$.

5. Označme si $\Gamma_1, ..., \Gamma_n$ všechny maximální konzistentní množiny v uzávěru Φ, a předpokládejme sporem, že $\nvdash \bigwedge\Gamma_1 \vee ... \vee \bigwedge\Gamma_n$, tedy že $\{\neg(\bigwedge\Gamma_1 \vee ... \vee \bigwedge\Gamma_n)\}$ je konzistentní množina, tedy $\{\neg\bigwedge\Gamma_1 \wedge ... \wedge \neg\bigwedge\Gamma_n\}$ je konzistentní množina. Tedy v každé Γ_i existuje formule φ_{Γ_i} taková, že $\{\neg\varphi_{\Gamma_1} \wedge ... \wedge \neg\varphi_{\Gamma_n}\}$

je konzistentní. Podle Lindenbaumova lemmatu je poslední množina částí nějaké maximální konzistentní množiny v uzávěru Φ, která je ale sporná s každou maximální konzistentní množinou, a to je spor. □

Pomocí bodů 1.-4. předchozího lemmatu snadno dokážeme Truth lemma pro formule tvaru $\neg\varphi$, $\varphi\wedge\psi$ a $K_a\varphi$. Pro formule tvaru $[\varphi]\,p$, $[\varphi]\,\neg\psi$, $[\varphi]\,(\psi\wedge\chi)$ a $[\varphi]\,K_a\psi$ ho snadno dokážeme díky redukčním axiomům. Nejobtížnější části důkazu Truth lemmatu jsou případy pro formule s obecnou znalostí, tedy formule $C_B\varphi$ a $[\varphi]\,C_B\psi$. Jak už jsme naznačili, pomocná tvrzení pro tyto obtížné případy si dokážeme v samostatném lemmatu. K tomu se nám bude hodit ještě jeden pojem.

V definici splněnosti formule $C_B\varphi$ jsme využili tranzitivní uzávěr sjednocení relací dosažitelnosti všech agentů ze skupiny B. Na takový uzávěr se můžeme dívat také jako na všechny cesty v modelu vedoucí podél hran ohodnocených libovolným z agentů z B. Podobně splněnost formule $[\varphi]\,C_B\psi$ podle sémantické definice znamená, že každá cesta přes libovolnou posloupnost agentů v ořezaném modelu $M|_{R\varphi}$ vede podél ψ-světů. Ekvivalentně můžeme říci, že každá cesta v původním modelu M, podél níž je pravdivá φ, vede podél $[\varphi]\,\psi$-světů. Takové pojetí bude užitečné v další části důkazu. Nadefinujme si tedy pojem cesty.

Definice 6.12 (Cesta). *B-cesta z Γ je posloupnost $\Gamma_0, ..., \Gamma_n$ maximálních konzistentních množin z Φ takových, že pro každé k $(0 \leq k \ \leq n)$ existuje $a \in B$ takové, že $\Gamma_k \to_a \Gamma_{k+1}$ a $\Gamma_0 = \Gamma$.*

φ-cesta je posloupnost $\Gamma_0, ..., \Gamma_n$ $(n \geq 1)$ maximálních konzistentních množin z Φ takových, že pro každé k $(1 \leq k \ \leq n)$ $\varphi \in \Gamma_k$.

Cestu $\Gamma_0, ..., \Gamma_n$ považujeme za cestu délky n.

B-φ-cesta z Γ je B-cesta z Γ, která je rovněž φ-cestou.

Zdůrazněme, že v definici φ-cesty nepožadujeme, aby formule φ náležela do množiny Γ_0 $(= \Gamma)$. To je rozdíl oproti verzi pro systém $\mathsf{S5}_n^{\mathsf{PAC}}$, a je dán právě absencí axiomu (T) (resp. nereflexivitou modelů) v systémech zkoumaných v této kapitole. Plyne to ostatně z rozdílné definice splněnosti formule $C_B\varphi$, na kterou jsme již upozorňovali. Pro obecnou *znalost* se požaduje pravdivost φ i ve výchozím světě, v případě obecného *přesvědčení* nikoli.

Všimněme si ještě, že φ-cestu délky 0 nepovažujeme za φ-cestu. Indukci z důkazu následujícího lemmatu, totiž indukci podle délky B-cesty, budeme tedy začínat pro $n = 1$, nikoli pro $n = 0$ jako je tomu v [Dit08]. To opět souvisí s tím, na co jsme poukazovali v předchozím odstavci. Pro délku cesty $n = 0$ by se nám obtížně něco dokazovalo, jestliže na množinu Γ, z níž cesta vede, neklademe žádné požadavky.

Tvrzení následujícího lemmatu jsou stejného znění jako tvrzení z bodů 6. a 7. lemmatu 7.31 z [Dit08] a i důkazy jsou v jejich základní konstrukci podobné. Jednotlivé kroky důkazu ovšem zásadně závisí na axiomech a odvozovacích pravidlech daných systémů, a tak jsou samozřejmě odlišné.

Lemma 6.13. *Nechť Φ je uzávěr nějaké formule a $M = (S, \to, V)$ je kanonický model pro Φ. Pokud Γ a Δ jsou maximální konzistentní množiny v Φ, pak*

a) pokud $C_B\varphi \in \Phi$, pak $C_B\varphi \in \Gamma$ právě tehdy, když každá B-cesta z Γ je φ-cestou,

b) pokud $[\varphi]\, C_B\psi \in \Phi$, pak $[\varphi]\, C_B\psi \in \Gamma$ právě tehdy, když každá B-φ-cesta z Γ je rovněž $[\varphi]\psi$-cestou.

Důkaz: a) Začněme implikací zleva doprava, tedy předpokládejme, že $C_B\varphi \in \Gamma$ a dokážeme, že každá B-cesta z Γ je φ-cestou. Budeme postupovat indukcí podle délky cesty, a dokážeme nejen že každá B-cesta z Γ je φ-cestou, ale i $C_B\varphi$-cestou.

1. Předpokládejme, že délka B-cesty je 1, tedy máme množinu Δ takovou, že $\Gamma \to_a \Delta$ pro nějaké $a \in B$. Chceme dokázat, že $\varphi \in \Delta$ a $C_B\varphi \in \Delta$. Z axiomu (C) dostaneme $\vdash C_B\varphi \to K_a(\varphi \wedge C_B\varphi)$ a protože $C_B\varphi \in \Gamma$, z deduktivní uzavřenosti množiny Γ plyne rovněž $K_a(\varphi \wedge C_B\varphi) \in \Gamma$. Z definice relace dosažitelnosti v kanonickém modelu dostaneme $(\varphi \wedge C_B\varphi) \in \Delta$, tedy $\varphi \in \Delta$ a $C_B\varphi \in \Delta$.

2. Předpokládejme, že tvrzení platí pro délku cesty n, a dokažme ho pro délku cesty $n+1$. Vezmeme-li libovolnou Γ_{n+1} dosažitelnou z $\Gamma_0 = \Gamma$ B-cestou délky $n + 1$, znamená to, že existuje Γ_n dosažitelná z Γ_0 B-cestou délky n a taková, že $\Gamma_n \to_a \Gamma_{n+1}$ pro nějaké $a \in B$. Podle indukčního předpokladu jsou $\varphi \in \Gamma_n$ a $C_B\varphi \in \Gamma_n$. Použijeme-li stejný argument jako v kroku pro $n = 1$, dostaneme $\varphi \in \Gamma_{n+1}$ a $C_B\varphi \in \Gamma_{n+1}$.

Nyní dokažme implikaci zprava doleva. Předpokládáme tedy, že každá B-cesta z Γ je φ-cestou, a chceme dospět k $C_B\varphi \in \Gamma$. Nejprve si vytvoříme množinu $\mathcal{W}$ všech maximálních konzistentních množin Δ z Φ takových, že každá B-cesta z Δ je φ-cestou, a položíme

$$\chi = \bigvee_{\Delta \in \mathcal{W}} \bigwedge \Delta.$$

Dále dokážeme

$$\begin{aligned}
&\vdash \quad \chi \to E_B(\varphi \wedge \chi) \\
&\vdash \quad \chi \to C_B\varphi \\
&\vdash \quad \bigwedge \Gamma \to \chi \\
&\vdash \quad \bigwedge \Gamma \to C_B\varphi.
\end{aligned}$$

Z předchozích řádků plyne druhý z prvního pomocí pravidla (RC), třetí plyne z $\Gamma \in \mathcal{W}$ (tedy $\bigwedge \Gamma$ je jedním z disjunktů formule χ), a čtvrtý plyne z dvou jeho předchozích. Zbývá tedy dokázat první řádek. Dokažme zvlášť $\vdash \chi \to E_B\varphi$ a $\vdash \chi \to E_B\chi$.

1) $\vdash \chi \to E_B\varphi$

Vezměme si libovolné $a \in B$ a libovolnou $\Delta \in \mathcal{W}$ a dokažme nejprve $\vdash \bigwedge \Delta \to K_a\varphi$. K tomu využijeme faktu, že množina $\Delta/K_a \cup \{\neg\varphi\}$ není konzistentní. Předpokládejme, že tato množina je konzistentní. Pak ji lze rozšířit na maximální konzistentní množinu Δ', z jejíž konstrukce plyne $\Delta \to_a \Delta'$ a $\neg\varphi \in \Delta'$, a nalezli jsme tedy B-cestu z Δ, která není φ-cestou, což je spor s předpokladem $\Delta \in \mathcal{W}$. Označíme-li si tedy $\varphi_1, ..., \varphi_n$ formule z Δ/K_a, dostaneme nekonzistentní množinu formulí $\{\varphi_1, ..., \varphi_n, \neg\varphi\}$. Z výrokové dokazatelnosti, pravidla (NecK) a z axiomu (K) pomocí pravidla (MP) dostáváme následující řádky:

$$
\begin{aligned}
\vdash\ & \varphi_1 \to (\varphi_2 \to (... \to (\varphi_n \to \varphi)...)) \\
\vdash\ & K_a(\varphi_1 \to (\varphi_2 \to (... \to (\varphi_n \to \varphi)...))) \\
\vdash\ & K_a(\varphi_1 \to (\varphi_2 \to (... \to (\varphi_n \to \varphi)...))) \to \\
& \to (K_a\varphi_1 \to (K_a\varphi_2 \to (... \to (K_a\varphi_n \to K_a\varphi)...))) \\
\vdash\ & K_a\varphi_1 \to (K_a\varphi_2 \to (... \to (K_a\varphi_n \to K_a\varphi)...))
\end{aligned}
$$

Formule $\varphi_1, ..., \varphi_n$ byly z množiny Δ/K_a, tedy formule $K_a\varphi_1, ..., K_a\varphi_n$ jsou z Δ. Z deduktivní uzavřenosti Δ a z poslední dokázané řádky tak plyne $K_a\varphi \in \Delta$. Z toho dostáváme $\vdash \bigwedge \Delta \to K_a\varphi$, a z předpokladů, že a je libovolné z B a Δ je libovolná z $\mathcal{W}$, dostáváme $\vdash \chi \to E_B\varphi$.

2) $\vdash \chi \to E_B\chi$

Označme nejprve $\overline{\mathcal{W}}$ komplement množiny $\mathcal{W}$ v množině všech maximálních konzistentních množin v Φ. Můžeme předpokládat, že $\overline{\mathcal{W}}$ je neprázdná, protože v případě, že $\overline{\mathcal{W}} = \emptyset$, je formule χ disjunkcí všech maximálních konzistentních množin v Φ a ta je podle bodu 5. lemmatu 6.11 dokazatelná, tedy i formule $\chi \to E_B\chi$ je dokazatelná.

Vezměme si tedy libovolné a z B, dále libovolnou $\Delta \in \mathcal{W}$ a libovolnou $\Delta' \in \overline{\mathcal{W}}$ a dokažme nejprve $\vdash \bigwedge \Delta \to K_a \neg \bigwedge \Delta'$. Pro žádné $b \in K$ nemůže nastat $\Delta \to_b \Delta'$, protože podle volby množin Δ a Δ' je každá B-cesta z Δ φ-cestou, ale z Δ' vede B-cesta, která není φ-cestou. Víme tedy, že $\Delta \not\to_a \Delta'$, a to podle definice relace dosažitelnosti znamená, že existuje formule ξ taková, že $K_a\xi \in \Delta$, ale $\xi \notin \Delta'$. Následující řádky se odvodí postupně z $\xi \notin \Delta'$ pomocí výrokové logiky, dále užitím pravidla (NecK) a axiomu (K), a z předpokladu $K_a\xi \in \Delta$:

$$\begin{aligned} &\vdash \ \xi \to \neg(\bigwedge \Delta') \\ &\vdash \ K_a\xi \to K_a\neg(\bigwedge \Delta') \\ &\vdash \ \bigwedge \Delta \to K_a\neg(\bigwedge \Delta') \end{aligned}$$

Protože Δ' byla libovolná z $\overline{\mathcal{W}}$, dostáváme $\vdash \bigwedge \Delta \to K_a(\bigwedge_{\Delta' \in \overline{\mathcal{W}}} \neg(\bigwedge \Delta'))$, a z bodu 5. lemmatu 6.11 plyne, že $\bigwedge_{\Delta' \in \overline{\mathcal{W}}} \neg(\bigwedge \Delta')$ implikuje $\bigvee_{\Delta \in \mathcal{W}}(\bigwedge \Delta)$, a tedy $\vdash \bigwedge \Delta \to K_a\chi$. Protože a bylo libovolné z B a Δ byla libovolná množina z $\mathcal{W}$, dostáváme $\vdash \chi \to E_B\chi$.

b) Začněme implikací zleva doprava. Předpokládáme tedy, že $[\varphi]\, C_B\psi \in \Gamma$, a dokážeme, že každá B-φ-cesta z Γ je $[\varphi]\psi$-cestou. Budeme postupovat indukcí podle délky cesty, a dokážeme nejen že každá B-φ-cesta z Γ je $[\varphi]\psi$-cestou, ale i $[\varphi]C_B\psi$-cestou.

1. Předpokládejme, že délka B-φ-cesty je 1, tedy máme množinu Δ takovou, že $\Gamma \to_a \Delta$ pro nějaké $a \in B$. Předpokládáme tedy, že $\varphi \in \Delta$ (protože zvolená cesta je φ-cestou), a chceme dokázat, že $[\varphi]\, \psi \in \Delta$ a $[\varphi]\, C_B\psi \in \Delta$. Následující řádky odvodíme postupně z axiomu (C), pomocí pravidla přidání nutnosti $[\psi]$, z axiomu (K) spolu s pravidlem (MP) a z redukčního axiomu pro přesvědčení po prohlášení:

$$\begin{aligned} &\vdash \ C_B\psi \to K_a(\psi \wedge C_B\psi) \\ &\vdash \ [\varphi]\,(C_B\psi \to K_a(\psi \wedge C_B\psi)) \\ &\vdash \ [\varphi]\, C_B\psi \to [\varphi]\, K_a(\psi \wedge C_B\psi) \\ &\vdash \ [\varphi]\, C_B\psi \to K_a(\varphi \to [\varphi]\,(\psi \wedge C_B\psi)) \end{aligned}$$

Protože $[\varphi]\, C_B\psi \in \Gamma$ a Γ je deduktivně uzavřená, je podle posledního dokázaného řádku rovněž $K_a(\varphi \to [\varphi]\,(\psi \wedge C_B\psi)) \in \Gamma$, a podle definice relace dosažitelnosti v kanonickém modelu je $(\varphi \to [\varphi]\,(\psi \wedge C_B\psi)) \in \Delta$. Předpokládali jsme, že $\varphi \in \Delta$, tedy opět z deduktivní uzavřenosti dostáváme $[\varphi]\,(\psi \wedge C_B\psi) \in \Delta$, a tedy i $[\varphi]\, \psi \in \Delta$ a $[\varphi]\, C_B\psi \in \Delta$.

2. Předpokládejme, že tvrzení platí pro délku cesty k, a dokažme ho pro délku cesty $k+1$. Vezmeme-li libovolnou Γ_{k+1} dosažitelnou z $\Gamma_0 = \Gamma$ B-φ-cestou délky $k+1$, znamená to, že existuje Γ_k dosažitelná z Γ_0 B-φ cestou délky k a taková, že $\Gamma_k \to_a \Gamma_k + 1$ pro nějaké $a \in B$. Podle indukčního předpokladu jsou $[\varphi]\, \psi \in \Gamma_k$ a $[\varphi]\, C_B\psi \in \Gamma_k$. Použijeme-li stejný argument jako v kroku pro $k = 1$, dostaneme $[\varphi]\, \psi \in \Gamma_{k+1}$ a $[\varphi]\, C_B\psi \in \Gamma_{k+1}$.

Nyní dokážeme implikaci zprava doleva, tedy předpokládáme, že každá B-φ-cesta z Γ je $[\varphi]\psi$-cestou, a chceme dospět k $[\varphi]\, C_B\psi \in \Gamma$. Nejprve si vytvoříme množinu $\mathcal{W}$ všech maximálních konzistentních množin Δ takových, že každá B-φ-cesta z Δ z Φ je $[\varphi]\psi$-cestou, a položíme

$$\chi = \bigvee_{\Delta \in \mathcal{W}} \bigwedge \Delta.$$

Dále dokážeme

$$\begin{aligned}
&\vdash \ \chi \to E_B(\varphi \to [\varphi]\,\psi) \\
&\vdash \ \chi \to E_B(\varphi \to \chi) \\
&\vdash \ \chi \to [\varphi]\,C_B\psi \\
&\vdash \ \bigwedge \Gamma \to \chi \\
&\vdash \ \bigwedge \Gamma \to [\varphi]\,C_B\psi.
\end{aligned}$$

Z předchozích řádků plyne třetí z prvních dvou pomocí pravidla pro obecné přesvědčení po prohlášení, čtvrtý plyne z $\Gamma \in \mathcal{W}$ (tedy $\bigwedge \Gamma$ je jedním z disjunktů formule χ), a pátý plyne z dvou jeho předchozích. Zbývá tedy dokázat první dva řádky.

1) $\vdash \chi \to E_B(\varphi \to [\varphi]\,\psi)$

Vezměme si libovolné $a \in B$ a libovolnou $\Delta \in \mathcal{W}$ a dokažme nejprve $\vdash \bigwedge \Delta \to K_a(\varphi \to [\varphi]\,\psi)$. K tomu využijeme faktu, že množina $\Delta/K_a \cup \{\neg(\varphi \to [\varphi]\,\psi)\}$ není konzistentní. Předpokládejme, že tato množina je konzistentní. Pak ji lze rozšířit na maximální konzistentní množinu Δ', tedy máme $\neg(\varphi \to [\varphi]\,\psi) \in \Delta'$, a z deduktivní uzavřenosti množiny Δ' dostáváme $\varphi \in \Delta'$ a $[\varphi]\,\psi \notin \Delta'$. Jenže z konstrukce množiny Δ' dostáváme rovněž $\Delta \to_a \Delta'$, a nalezli jsme tedy cestu z Δ, která je φ-cestou, ale není $[\varphi]\,\psi$-cestou, což je spor s předpokladem $\Delta \in \mathcal{W}$. Označíme-li si tedy $\varphi_1, ..., \varphi_n$ formule z Δ/K_a, dostaneme nekonzistentní množinu formulí $\{\varphi_1, ..., \varphi_n, \neg(\varphi \to [\varphi]\,\psi)\}$. Z výrokové dokazatelnosti, pravidla (NecK) a axiomu (K) pomocí pravidla (MP) dostáváme následující řádky:

$$\begin{aligned}
&\vdash \ \varphi_1 \to (\varphi_2 \to (... \to (\varphi_n \to \psi)...)) \\
&\vdash \ K_a(\varphi_1 \to (\varphi_2 \to (... \to (\varphi_n \to \psi)...))) \\
&\vdash \ K_a(\varphi_1 \to (\varphi_2 \to (... \to (\varphi_n \to \varphi)...))) \to \\
&\quad\ \to (K_a\varphi_1 \to (K_a\varphi_2 \to (... \to K_a(\varphi_n \to \psi)...))) \\
&\vdash \ K_a\varphi_1 \to (K_a\varphi_2 \to (... \to K_a(\varphi_n \to \psi)...))
\end{aligned}$$

Formule $\varphi_1, ..., \varphi_n$ byly z množiny Δ/K_a, tedy formule $K_a\varphi_1, ..., K_a\varphi_n$ jsou z Δ. Z deduktivní uzavřenosti množiny Δ plyne $K_a(\varphi_n \to \psi) \in \Delta$. Z toho dostáváme $\vdash \bigwedge \Delta \to K_a(\varphi \to [\varphi]\,\psi)$, a protože a je libovolné z B a Δ je libovolná z $\mathcal{W}$ dostáváme $\vdash \chi \to E_B(\varphi \to [\varphi]\,\psi)$.

2) $\vdash \chi \to E_B(\varphi \to \chi)$

Vezměme si libovolné $a \in B$ a libovolné $\Delta \in \mathcal{W}$ a $\Delta' \in \overline{\mathcal{W}}$ (stejně jako v 2) bodu a) můžeme předpokládat, že $\overline{\mathcal{W}}$ je neprázdná, protože v opačném případě je formule χ disjunkcí všech maximálních konzistentních množin, a formule $\chi \to E_B(\varphi \to \chi)$ je tak dokazatelná triviálně), a dokažme nejprve $\vdash \bigwedge \Delta \to K_a(\varphi \to \neg \bigwedge \Delta')$. K tomu rozlišme případy $\varphi \in \Delta'$ a $\varphi \notin \Delta'$. Jestliže $\varphi \in \Delta'$, pak pro žádné $b \in B$ nemůže nastat $\Delta \to_b \Delta'$, protože podle volby množin Δ a Δ' je každá φ-cesta z Δ rovněž $[\varphi]\,\psi$-cestou, ale z Δ' vede φ-cesta, která není $[\varphi]\,\psi$-cestou. Víme tedy, že $\Delta \not\to_a \Delta'$, a to podle definice relace dosažitelnosti znamená, že existuje formule ξ taková, že $K_a\xi \in \Delta$, ale $\xi \notin \Delta'$. Následující řádky se odvodí postupně z $\xi \notin \Delta'$, pomocí výrokové logiky, užitím pravidla (NecK) a z $K_a\xi \in \Delta$:

$$\begin{array}{ll}
\vdash & \xi \to \neg(\bigwedge \Delta') \\
\vdash & \xi \to (\varphi \to \neg(\bigwedge \Delta')) \\
\vdash & K_a\xi \to K_a(\varphi \to \neg(\bigwedge \Delta')) \\
\vdash & \bigwedge \Delta \to K_a(\varphi \to \neg(\bigwedge \Delta'))
\end{array}$$

Jestliže $\varphi \notin \Delta'$, můžeme přímo dokázat následující řádky:

$$\begin{array}{ll}
\vdash & \varphi \to \neg(\bigwedge \Delta') \\
\vdash & K_a(\varphi \to \neg(\bigwedge \Delta')) \\
\vdash & \bigwedge \Delta \to K_a(\varphi \to \neg(\bigwedge \Delta'))
\end{array}$$

V obou případech jsme tedy dospěli k dokazatelnosti formule $\bigwedge \Delta \to K_a(\varphi \to \neg(\bigwedge \Delta'))$. Protože Δ' byla libovolná množina z $\overline{\mathcal{W}}$, dostáváme $\vdash \bigwedge \Delta \to K_a(\varphi \to \bigwedge_{\Delta' \in \overline{\mathcal{W}}} \neg(\bigwedge \Delta'))$, a z bodu 5. lemmatu 3 plyne $\vdash \bigwedge \Delta \to K_a(\varphi \to \chi)$. Protože a bylo libovolné z B a Δ byla libovolná z $\mathcal{W}$, dostáváme $\vdash \chi \to E_B(\varphi \to \chi)$. $\square$

Truth Lemma budeme dokazovat indukcí podle složitosti formule. Narazíme tu na stejný problém jako v předchozí podkapitole, když jsme dokazovali ekvivalenci formule s jejím překladem, totiž že potřebujeme využívat indukčního předpokladu i pro formule, které nejsou podformulemi dokazované formule. Opět to ale snadno vyřešíme nadefinováním jiné míry složitosti formule. Následující definice je rozšířením definice 6.2 o formuli $C_B\varphi$ a následující lemma rozšířením lemmatu 6.3 o případ pro $[\varphi]\,C_B\psi$.

Definice 6.14 (Složitost)**.** *Složitost formule* $c : \mathcal{L}_n^{PAC} \to \mathbb{N}$ *je definována následovně:*

$$\begin{aligned} c(p) &= 1 \\ c(\neg\varphi) &= 1 + c(\varphi) \\ c(\varphi \wedge \psi) &= 1 + max(c(\varphi), c(\psi)) \\ c(K_a\varphi) &= 1 + c(\varphi) \\ c(C_B\varphi) &= 1 + c(\varphi) \\ c([\varphi]\,\psi) &= (4 + c(\varphi)).c(\psi) \end{aligned}$$

Lemma 6.15. *Pro každé* φ, ψ *a* χ *platí:*

1. $c(\psi) \geqslant c(\varphi)$, *jestliže* $\varphi \in Sub(\psi)$
2. $c([\varphi]\,p) > c(p)$
3. $c([\varphi]\,\neg\psi) > c(\neg\,[\varphi]\,\psi)$
4. $c([\varphi]\,(\psi \wedge \chi)) > c([\varphi]\,\psi \wedge [\varphi]\,\chi)$
5. $c([\varphi]\,K_a\psi) > c(K_a(\varphi \to [\varphi]\,\psi))$
6. $c([\varphi]\,C_B\psi) > c([\varphi]\,\psi)$
7. $c([\varphi]\,[\psi]\,\chi) > c([\varphi \wedge [\varphi]\,\psi]\,\chi)$

Důkaz: Důkaz je stejný jako důkaz lemmatu 6.3, nový bod 6. platí zjevně také, protože $c(C_B\psi)$ je větší než $c(\psi)$. □

Nyní máme připraveno vše potřebné k důkazu Truth lemmatu.

Lemma 6.16 (Truth)**.** *Nechť* Φ *je uzávěr nějaké formule a* $M = (S, \to, V)$ *je kanonický model pro* Φ*. Pak pro každou* $\Gamma \in S$ *a pro každou* $\varphi \in \Phi$ *platí:*

$$\varphi \in \Gamma \text{ \textit{právě tehdy, když} } (M, \Gamma) \models \varphi.$$

Důkaz: Předpokládejme, že $\varphi \in \Phi$. Budeme pokračovat indukcí podle složitosti $c(\varphi)$.

1. Nechť φ je výroková proměnná p. Pak podle definice valuace v kanonickém modelu je $p \in \Gamma$ právě tehdy, když $\Gamma \in V_p$, což je podle definice splňování v modelu právě tehdy, když $(M, \Gamma) \models p$.

2. Předpokládejme, že pro každou formuli φ takovou, že $c(\varphi) \leqslant n$ tvrzení lemmatu platí, tedy $\varphi \in \Gamma$ právě tehdy, když $(M, \Gamma) \models \varphi$. Budeme tvrzení dokazovat pro formule složitosti $n + 1$ a rozlišíme následující případy:

- formule tvaru $\neg\varphi$: Předpokládejme, že $\neg\varphi \in \Gamma$. Protože $\neg\varphi \in \Phi$, je podle bodu 2. lemmatu 6.11 $\neg\varphi \in \Gamma$ právě tehdy když $\varphi \notin \Gamma$. To je podle indukčního předpokladu právě tehdy, když $(M, \Gamma) \not\models \varphi$, což je podle definice $\models$ právě tehdy, když $(M, \Gamma) \models \not\varphi$.

- formule tvaru $\varphi \wedge \psi$: Předpokládejme, že $\varphi \wedge \psi \in \Gamma$. Protože $\varphi \wedge \psi \in \Phi$, je podle bodu 3. lemmatu 6.11 $\varphi \wedge \psi \in \Gamma$ právě tehdy, když $\varphi \in \Gamma$ a $\psi \in \Gamma$. To je podle indukčního předpokladu právě tehdy, když $(M, \Gamma) \models \varphi$ a $(M, \Gamma) \models \psi$, což je podle definice $\models$ právě tehdy, když $(M, \Gamma) \models \varphi \wedge \psi$.

- formule tvaru $K_a\varphi$: Předpokládejme, že $K_a\varphi \in \Gamma$. Protože $K_a\varphi \in \Phi$, je podle bodu 4. lemmatu 6.11 $K_a\varphi \in \Gamma$ právě tehdy, když $\varphi \in \Gamma'$ pro každé Γ' takové, že $\Gamma \to_a \Gamma'$. To je podle indukčního předpokladu právě tehdy, když $(M, \Gamma') \models \varphi$ pro každé Γ' takové, že $\Gamma \to_a \Gamma'$. To je podle definice $\models$ právě tehdy, když $(M, \Gamma) \models K_a\varphi$.

- formule tvaru $C_B\varphi$: Předpokládejme, že $C_B\varphi \in \Gamma$. Protože $C_B\varphi \in \Phi$, je podle bodu a) lemmatu 6.13 $C_B\varphi \in \Gamma$ právě tehdy, když každá B-cesta z Γ je φ-cesta a to je podle indukčního předpokladu právě tehdy, když každá B-cesta je cesta, podél níž je φ pravdivé. To je podle definice $\models$ právě tehdy, když $(M, \Gamma) \models C_B\varphi$.

- formule tvaru $[\varphi]\, p$: Předpokládejme, že $[\varphi]\, p \in \Gamma$. Protože $[\varphi]\, p \in \Phi$, je podle redukčního axiomu pro atomické formule $[\varphi]\, p \in \Gamma$ právě tehdy, když $p \in \Gamma$. Podle bodu 2. předchozího lemmatu můžeme použít indukční předpoklad, a dostáváme tedy $(M, \Gamma) \models p$. To je podle definice splňování právě tehdy, když $(M, \Gamma) \models [\varphi]\, p$.

- formule tvaru $[\varphi]\, \neg\psi$: Předpokládejme $[\varphi]\, \neg\psi \in \Gamma$. Protože $[\varphi]\, \neg\psi \in \Phi$, je podle redukčního axiomu pro negaci $[\varphi]\, \neg\psi \in \Gamma$ právě tehdy, když $\neg\, [\varphi]\, \psi \in \Gamma$. Podle bodu 3. předchozího lemmatu můžeme použít indukční předpoklad, a dostáváme tedy $(M, \Gamma) \models \neg\, [\varphi]\, \psi$. To je podle definice splňování právě tehdy, když $(M, \Gamma) \models [\varphi]\, \neg\psi$.

- formule tvaru $[\varphi]\, (\psi \wedge \chi)$: Předpokládejme, že $[\varphi]\, (\psi \wedge \chi) \in \Gamma$. Protože $[\varphi]\, (\psi \wedge \chi) \in \Phi$, je podle redukčního axiomu pro konjunkci $[\varphi]\, (\psi \wedge \chi) \in \Gamma$ právě tehdy, když $([\varphi]\, \psi \wedge [\varphi]\, \chi) \in \Gamma$. Podle bodu 4. předchozího lemmatu můžeme použít indukční předpoklad, a dostáváme tedy $(M, \Gamma) \models [\varphi]\, \psi \wedge [\varphi]\, \chi$. To je podle definice splňování právě tehdy, když $(M, \Gamma) \models [\varphi]\, (\psi \wedge \chi)$.

- formule tvaru $[\varphi]\, K_a\psi$: Předpokládejme, že $[\varphi]\, K_a\psi \in \Gamma$. Protože $[\varphi]\, K_a\psi \in \Phi$, je podle redukčního axiomu pro přesvědčení $[\varphi]\, K_a\psi \in \Gamma$ právě tehdy, když $B_a(\varphi \to [\varphi]\, \psi) \in \Gamma$. Podle bodu 5. předchozího lemmatu můžeme použít indukční předpoklad, a dostáváme tedy $(M, \Gamma) \models K_a(\varphi \to [\varphi]\, \psi)$. To je podle definice splňování právě tehdy, když $(M, \Gamma) \models [\varphi]\, K_a\psi$.

- formule tvaru $[\varphi]\, C_B\psi$: Předpokládejme, že $[\varphi]\, C_B\psi \in \Gamma$. Protože $[\varphi]\, C_B\psi \in \Phi$, je podle bodu b) lemmatu 6.13 $[\varphi]\, C_B\psi \in \Gamma$ právě tehdy, když každá B-φ-cesta z Γ je rovněž $[\varphi]\psi$-cestou. Podle bodu 6. předchozího lemmatu můžeme použít indukční předpoklad, a dostáváme, že $[\varphi]\, C_B\psi \in \Gamma$ právě tehdy, když každá B-cesta z Γ, podél níž je φ pravdivá, je rovněž cestou, podél níž je $[\varphi]\psi$ pravdivá. To je podle definice splňování právě tehdy, když $(M, \Gamma) \models [\varphi]\, C_B\psi$.

- formule tvaru $[\varphi]\,[\psi]\,\chi$: Předpokládejme, že $[\varphi]\,[\psi]\,\chi \in \Gamma$. Protože $[\varphi]\,[\psi]\,\chi \in \Phi$, je podle redukčního axiomu pro kompozici prohlášení $[\varphi]\,[\psi]\,\chi \in \Gamma$ právě tehdy, když $[\varphi \wedge [\varphi]\,\psi]\,\chi \in \Gamma$. Podle bodu 7. předchozího lemmatu můžeme použít indukční předpoklad, a dostáváme tedy $(M, \Gamma) \models [\varphi \wedge [\varphi]\,\psi]\,\chi$. To je podle definice splňování právě tehdy, když $(M, \Gamma) \models [\varphi]\,[\psi]\,\chi$. □

Teď už zbývá dokázat jen maličkost, totiž že kanonický model je skutečně modelem našich teorií. V případě systému $\mathsf{K}_n^{\mathsf{PAC}}$ o tom není pochyb, ovšem pro systémy $\mathsf{K4}_n^{\mathsf{PAC}}$ a $\mathsf{K45}_n^{\mathsf{PAC}}$ je ještě třeba ukázat, že relace dosažitelnosti kanonického modelu splňuje příslušná omezení, neboli že je tranzitivní v případě systému $\mathsf{K4}_n^{\mathsf{PAC}}$ a tranzitivní a euklidovská v případě systému $\mathsf{K45}_n^{\mathsf{PAC}}$. Ukažme si, že axiom $(\mathsf{4})$ nám vynutí tranzitivitu, podobně se dá ukázat, že axiom $(\mathsf{5})$ už zaručí euklidovskost relace dosažitelnosti.

Předpokládejme tedy, že $\Gamma \rightarrow_a \Delta$ a $\Delta \rightarrow_a \Xi$ a že ve světě Γ jsou pravdivé všechny instance axiomu $(\mathsf{4})$. Chceme dokázat, že $\Gamma \rightarrow_a \Xi$, neboli že $\Gamma/K_a \subseteq \Xi$. Vezměme si tedy libovolnou formuli $\varphi \in \Gamma/K_a$. Z definice množiny Γ/K_a víme, že $K_a\varphi \in \Gamma$. Z axiomu $(\mathsf{4})$ a z deduktivní uzavřenosti maximální konzistentní množiny Γ dostáváme $K_aK_a\varphi \in \Gamma$ a z konstrukce kanonického modelu dostáváme postupně $K_a\varphi \in \Delta$ a $\varphi \in \Xi$.

Nyní už můžeme skutečně přistoupit k větě o úplnosti.

Věta 6.17. *Pro každou formuli* $\varphi \in \mathcal{L}_n^{\mathsf{PAC}}$ *platí*

$$\begin{aligned} \mathcal{K} \models \varphi \quad &\Rightarrow \quad \mathsf{K}_n^{\mathsf{PAC}} \vdash \varphi \\ \mathcal{K}4 \models \varphi \quad &\Rightarrow \quad \mathsf{K4}_n^{\mathsf{PAC}} \vdash \varphi \\ \mathcal{K}45 \models \varphi \quad &\Rightarrow \quad \mathsf{K45}_n^{\mathsf{PAC}} \vdash \varphi. \end{aligned}$$

Důkaz: Budeme dokazovat kontrapozicí. Nechť $\mathsf{X}_n^{\mathsf{PAC}}$ je jeden ze systémů $\mathsf{K}_n^{\mathsf{PAC}}$, $\mathsf{K4}_n^{\mathsf{PAC}}$ a $\mathsf{K45}_n^{\mathsf{PAC}}$, a $\mathcal{X}$ je odpovídající třída kripkovských struktur. Předpokládejme $\mathsf{X}_n^{\mathsf{PAC}} \nvdash \varphi$. Tedy $\{\neg\varphi\}$ je $\mathsf{X}_n^{\mathsf{PAC}}$-konzistentní množina. Podle Lindenbaumova lemmatu existuje množina Γ, která je maximální $\mathsf{X}_n^{\mathsf{PAC}}$-konzistentní v $Sub^+(\neg\varphi)$ taková, že $\neg\varphi \in \Gamma$. Vytvoříme-li kanonický model M pro $Sub^+(\neg\varphi)$, pak podle Truth lemmatu $(M, \Gamma) \models \neg\varphi$. Tedy $\mathcal{X} \not\models \varphi$. □

7 Závěr

Náplní této práce bylo zkoumání logiky veřejného prohlášení. Nejprve jsme vyložili logiku pravdivého veřejného prohlášení, která je dynamickým rozšířením systému S5, tak, jak ji známe z literatury.

Poté jsme si položili otázku, jak by se mělo takové veřejné prohlášení chovat v systémech, v nichž neplatí axiom T, tedy v systémech, v nichž se epistemický operátor neinterpretuje jako (pravdivá) znalost, ale spíše jako přesvědčení. Pro tyto potřeby jsme zavedli pojem *přesvědčivého* veřejného prohlášení a vytvořili pro něj novou sémantiku. Té jsme pak přizpůsobili i axiomatiku, a podařilo se nám dokázat její úplnost.

Dále jsme měli v plánu vytvořit podobným způsobem sémantiku veřejného prohlášení i pro systémy, které namísto axiomu T přijímají slabší axiom D, čímž se dospěje k přesvědčení, které sice může být mylné, nikoli však sporné. Tady jsme ovšem narazili na problém se zachováním bezespornosti přesvědčení po prohlášení, a ten se nám nepodařilo zcela vyřešit. Pro každý ze studovaných systémů jsme sice nakonec nalezli sémantiku veřejného prohlášení, která bezespornost přesvědčení zachovává, ale už jsme nezjistili nic o vztahu takto nadefinovaného prohlášení s obecným přesvědčením a rovněž se nám nepodařilo tuto sémantiku axiomatizovat. Otázka veřejného prohlášení v systémech s axiomem D tak pro nás zůstává otevřena.

Literatura

[Bal04] Baltag A., Coecke B., Sadrzadeh M. Reasoning about Dynamic Epistemic Logic, In *Proceedings of European Workshop on Multi-Agent Systems*, pp. 605-614, Barcelona, 2004.

[Bal99] Baltag A., Moss L. S., Solecki S. The logic of public announcements, common knowledge, and private suspicions. In *Proceedings of the 7th Conference on Theoretical Aspects of Rationality and Knowledge*, pp. 43-56, 1999.

[Ben02] van Benthem J. One is a lonely number: on the logic of communication. In Chatzidakis Z., Koepke P., Pohlers W., editors, *Logic Colloquium '02*, volume 27 of *Lecture Notes in Logic*, pp. 96-129. ASL and A. K. Peters, 2006.

[Ben04] van Bentem J. Dynamic logic of belief revision. *Journal of Applied Non-Classical Logics*, 17(2):129-155, 2007.

[Ben06] van Benthem J., van Eijck J., Kooi B. Logics of communication and change. *Information and Computation*, 204(11):1620-1662, 2006.

[Bla01] Blackburn P., de Rijke M., Venema Y. *Modal Logic*, Cambridge University Press, 2001.

[Dit05] van Ditmarsch H. P. Prolegomena to dynamic logic for belief revision, *Synthese*, 147(2):229-275, 2005.

[Dit08] van Ditmarsch H. P., van der Hoek W., Kooi B. *Dynamic Epistemic Logic*, volume 337 of *Synthese Library*. Springer, 2008.

[Fag95] Fagin R., Halpern J. Y., Moses Y., Vardi M. Y. *Reasoning About Knowledge*. The MIT Press, 1995.

[Get63] Gettier E.L. Is justified true belief knowledge. *Analysis*, 23:121-123, 1963.

[Hin62] Hintikka J. *Knowledge and Belief: An Introduction to the Logic of the Two Notions*. Cornell University Press, 1962.

[Ste09] Steiner D. *Belief Change Functions for Multi-Agent Systems*. Inauguraldissertation der Philosophisch-naturwissenschaftlichen Fakultät der Universität Bern, 2009.